

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕХНОЛОГИИ И ДИЗАЙНА»

Е. П. РОМАНОВА

ФИЗИКА

Часть 1

Курс лекций

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве
учебного пособия

Санкт-Петербург

2013

УДК 53
ББК 22.3
Р86

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей физики РГПУ
им. А. И. Герцена *В. М. Грабов*

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики
ФГБОУВПО «Санкт-Петербургский государственный университет технологии
и дизайнв» *И. Г. Румынская*

Р 86 **Романова, Е. П.**
Физика. Часть 1. Курс лекций: учеб. пособие. - СПб.: ФГБОУВПО
«СПГУТД», 2013. – 132 с.
ISBN 978-5-7937-0898-2
ISBN 978-5-7937-0899-3

В пособии представлена часть I. курса лекций по физике, разделы механика и молекулярная физика. При составлении пособия использовался учебник И.В.Савельева «Курс физики», в качестве основного при изучении предмета, а также учебник И.Е.Иродова «Механика», «Физика макросистем». Пособие представляет собой материал первого из двух семестров, предназначенных для изучения курса общей физики. Рекомендуются для дистанционного обучения студентов заочной формы обучения направлений 100700.62;100800.62; 262000.62; 262200.62; СПГУТД.

Пособие предназначено для студентов вузов.

УДК 53
ББК 22.3

ISBN 978-5-7937-0898-2
ISBN 978-5-7937-0899-3

© ГОУВПО «СПГУТД», 2013
© Романова Е.П., 2013

Введение

Настоящее учебное пособие «Механика. Молекулярная физика» содержит изложение основных идей классической механики, включая механические колебания и волны, а также молекулярную физику. Пособие, учитывая свое предназначение для заочного обучения в течение двух семестров, данный материал соответствует программе первого из этих семестров. Пособие включает анализ типичных ошибок, неизбежных при самостоятельном изучении курса, снабжено значительным количеством рисунков и адаптировано для обучения студентов-заочников.

В пособии приняты некоторые обозначения для компактного изложения часто повторяющихся процедур: (1) $\square$ (2) означает, что выражение из формулы (1) подставляется в формулу (2); $\square$ - является символическим обозначением слова «следовательно»; $\sim$ пропорционально, и некоторые другие общепринятые символы математических операций.

Содержание пособия организовано в виде лекций. Внутри каждой лекции отдельные вопросы отделяются заголовками «в строчку», - т.е. название выделено полужирным курсивом, и текст начинается на той же строке абзаца. Эти вопросы примерно соответствуют формулировкам вопросов экзаменационных билетов, что облегчает самостоятельную подготовку к экзаменам.

Представленное пособие соответствует государственным стандартам по физике для всех направлений заочного обучения СПГУТД, и может быть рекомендовано для самостоятельной работы студентов и для дистанционного обучения.

МЕХАНИКА

Лекция 1. Кинематика материальной точки

Существуют три способа описания движения материальной точки: векторный, координатный и "естественный". В векторном способе положение некоторой точки A задают радиус-вектором $\vec{r}(x, y, z, t)$, проведенным из начала координат системы отсчета в точку A . Во время движения конец радиус-вектора описывает в пространстве кривую, которая называется **траекторией**.

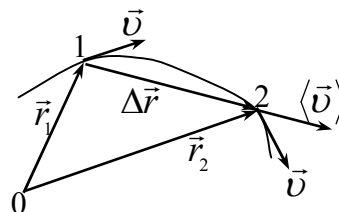


Рис.1

А

Перемещение. Пусть за время Δt точка переместилась из точки 1 в точку 2 (рис.1). Вектор $\Delta \vec{r}$, идущий из 1 в 2, называется **перемещением**:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Средним вектором скорости называется вектор

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Очевидно, направление $\langle \vec{v} \rangle$ совпадает с направлением вектора перемещения! Однако **вектор мгновенной скорости будет направлен по касательной к траектории**. Поэтому скорость определим как предел среднего вектора скорости при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1)$$

Выражение в правой части - это производная. Поэтому можно дать более лаконичное определение скорости: **скорость – это производная от радиус-вектора по времени**.

Ускорение – это скорость изменения скорости, т.е. производная от скорости по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (2)$$

Из данных определений следует, что, зная зависимость радиус-вектора от времени $\vec{r}(t)$, можно найти скорость и ускорение точки в любой момент.

Обратная задача. Можно ли найти $\vec{v}(t)$ или $\vec{r}(t)$, зная зависимость $\vec{a}(t)$? Оказывается для однозначного решения этой задачи недостаточно одной зависимости $\vec{a}(t)$, необходимо еще задать начальные условия: например, скорость $\vec{v}_0$ и радиус вектор $\vec{r}_0$ точки в некоторый начальный момент времени $t=0$.

Рассмотрим простейший пример. Пусть $\vec{a} = \text{const}$ (движение равнопеременное!). Из (2) $\Rightarrow d\vec{v} = \vec{a}dt, \Rightarrow \Delta\vec{v} = \int_0^t \vec{a}dt = \vec{a}t$. Но $\Delta\vec{v}$ - это изменение скорости, а не сама скорость: $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$. Поэтому, чтобы найти $\vec{v}$, необходимо знать $\vec{v}_0$ в начальный момент времени: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \Delta\vec{v}, \Rightarrow$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}dt = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \quad (3)$$

Аналогично интегрируем для нахождения $\vec{r}$:

$$\Delta\vec{r} = \int_0^t \vec{v}dt = \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a}t)dt = \vec{v}_0t + \frac{\vec{a}t^2}{2},$$

где $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$.

Для нахождения самого радиус-вектора $\vec{r}$ необходимо знать его значение в начальный момент времени $\vec{r}_0$:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{\vec{a}t^2}{2}. \quad (4)$$

Обратите внимание! Чтобы найти $\vec{r}$ по зависимости $\vec{v}(t)$ было необходимо один раз проинтегрировать и дополнительно знать одно начальное условие. Чтобы найти $\vec{r}$ по зависимости $\vec{a}(t)$ потребовалось два раза проинтегрировать и два начальных условия. Так и должно быть, поскольку интеграл определен с точностью до константы. И еще: в данном примере мы вынесли ускорение из-под интеграла, потому что $\vec{a} = const$. Если это не так, то выносить нельзя! Сравните: при интегрировании скорости, мы ее не выносили, т.к. скорость оказалась функцией времени.

При **координатном способе** каждому векторному уравнению соответствуют три скалярных уравнения в проекциях на оси x, y, z (в декартовых координатах). Со скалярными уравнениями обращаться проще, но их в три раза больше, поэтому **сначала следует записывать уравнения в векторном виде**. Зависимости $\vec{r}(x, y, z, t)$ соответствуют три скалярных уравнения: $x(t), y(t), z(t)$. Определению вектора скорости (1) соответствуют $v_x(t), v_y(t), v_z(t)$:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt};$$

аналогично для ускорения:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

Зная три проекции векторов скорости и ускорения можно найти и модули этих величин в любой момент времени, например, модуль вектора скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Если вектор скорости составляет с осью x угол α , то $v_x = v \cos \alpha$; $v_y = v \sin \alpha$; и так далее... (рис.2). Аналогично определяются модули векторов $\vec{r}$ и $\vec{a}$:

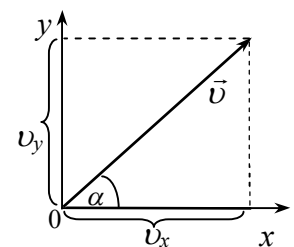


Рис.2

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Почему-то формула для модуля для вектора $\vec{r}$ осознается студентами с трудом, хотя для этого достаточно знать, **откуда начинается радиус-вектор** и теорему Пифагора.

Решение обратной задачи – нахождение скорости и закона движения точки по заданному ускорению – производится, как и в векторном способе, путем интегрирования с начальными условиями. (Помните, что количество интегрирований и начальных условий должно совпадать?)

Естественный способ выгодно использовать, когда траектория известна. Тогда положение точки A определяют дуговой координатой l (или путем S), отсчитанной от выбранного на траектории начала: при этом произвольно назначают одно направление вдоль траектории положительным, а другое – отрицательным. Введем единичный вектор $\vec{\tau}$, направленный по касательной к траектории в положительную сторону. Это направление называется тангенциальным. Поскольку вектор скорости направлен также, скорость можно записать как

$$\vec{v} = v\vec{\tau}, \quad (5)$$

где $v = \frac{dS}{dt}$ и $v = |\vec{v}|$.

Продифференцировав выражение (5) по времени, найдем ускорение:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}; \quad (6)$$

затем преобразуем второе слагаемое:

$$v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = v \frac{d\vec{\tau}}{dl} \frac{dl}{dt} = v^2 \frac{d\vec{\tau}}{dl}. \quad (7)$$

Определим приращение вектора $d\vec{\tau}$ на участке dl (рис.3). Поскольку dl мало, всегда можно найти такую окружность радиуса r с центром в точке O , что ее дуга будет на участке dl совпадать с

элементом траектории. Тогда точка O будет называться центром кривизны траектории в этом месте, а r - радиусом кривизны. Векторы

$\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}_2$, как касательные перпендикулярны

радиусам в точках касания, $\Rightarrow$ угол между

ними также как и между этими радиусами

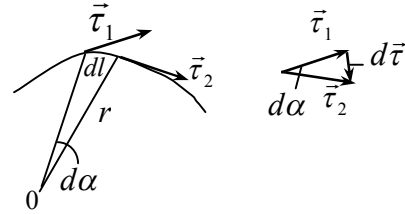


Рис.3

равен $d\alpha$, что видно на рис.3 справа, где оба вектора отложены от одной точки.

Угол $d\alpha$ можно выразить двумя способами: $d\alpha = \frac{dl}{r}$ и $d\alpha = \frac{|d\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}_{1,2}|} = \frac{d\tau}{1}$, так как

векторы $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}_2$ - векторы единичной длины. Приравнивая правые части,

$$\text{находим } \frac{dl}{r} = \frac{d\tau}{1} \Rightarrow \frac{d\tau}{dl} = \frac{1}{r}.$$

Поскольку вектор $d\vec{\tau}$ перпендикулярен векторам $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}_2$ (из-за малости dl), и направлен к центру кривизны O , то последнее равенство можно записать с

помощью единичного вектора $\vec{n}$ (направлен вдоль r к центру O): $\frac{d\vec{\tau}}{dl} = \frac{\vec{n}}{r}$.

Подставляя этот результат в (7) $\rightarrow$ (6), найдем окончательное выражение для ускорения в естественных координатах:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{v^2}{r} \cdot \vec{n} \quad (8)$$

В формуле (8) первое слагаемое называется тангенциальным ускорением, а второе нормальным:

$\vec{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau}$, $\Rightarrow$ проекция тангенциального ускорения $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ и характеризует

скорость изменения скорости по величине;

$\vec{a}_n = \frac{v^2}{r} \cdot \vec{n}$, $\Rightarrow$ величина нормального ускорения $a_n = \frac{v^2}{r}$ и характеризует

скорость изменения скорости по направлению. Модуль полного ускорения точки

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Лекция 2. Кинематика твердого тела.

Твердым называется тело, у которого расстояния между любыми его точками сохраняются. Иначе говоря, твердое тело никак не деформируется при любых его движениях. Основными видами движения твердого тела являются поступательное, вращение вокруг неподвижной оси, плоское движение.

Поступательным движением твердого тела называется такое его движение, при котором любая прямая, связанная с телом, остается параллельной своему начальному положению. Поэтому все точки тела

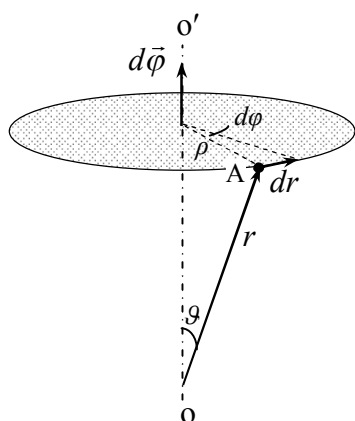


Рис.4

движутся по одинаковым траекториям и их скорости и ускорения в любой момент времени одинаковы.

Описание поступательного движения твердого тела сводится к описанию любой его точки, и поэтому не требует отдельного рассмотрения.

Вращение вокруг неподвижной оси. При таком вращении все точки твердого тела описывают окружности разных радиусов. Пусть твердое тело поворачивается за время d вокруг неподвижной

оси OO' на угол $d\varphi$ (рис.4). Этот поворот мы будем характеризовать **вектором углового перемещения** $d\vec{\varphi}$, направление которого совпадает с осью OO' и связано с вектором перемещения $d\vec{r}$ по правилу правого винта (если поворачивать винт в сторону $d\vec{r}$, то он должен ввинчиваться в направлении $d\vec{\varphi}$, например, в нашем случае вверх).

Из рисунка 4 видно, что $|d\vec{r}| = dr = r \sin \vartheta d\varphi$, или в векторном виде

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \times \vec{r}]. \quad (9)$$

Введенный таким образом вектор углового перемещения производит какое-то неестественное впечатление – он таким и является. Приписать этому объекту направление по определению (такие векторы называются *аксиальными*) удобно, так как нетрудно убедиться, что векторы угловых перемещений удовлетворяют всем правилам действий с векторами: сложению, умножению на число, скалярному и векторному умножению и т.д.

Угловая скорость и угловое ускорение. Угловой скоростью называется аксиальный вектор

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Очевидно, он направлен также как вектор $d\vec{\varphi}$.

Угловым ускорением называется также аксиальный вектор

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Направление вектора $\vec{\beta}$ совпадает с вектором $\vec{\omega}$, если угловая скорость увеличивается, и противоположно вектору $\vec{\omega}$, если угловая скорость убывает.

Связь между линейными и угловыми величинами. Выберем произвольную точку A твердого тела и выясним, как связаны ее линейная (обычная) скорость и угловая скорость (рис.4). Разделим выражение (9) на dt :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right] = [\vec{\omega} \times \vec{r}].$$

Таким образом, угловая скорость $\vec{\omega}$ и линейная скорость $\vec{v}$ связаны посредством векторного произведения

$$\boxed{\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]} \quad (10)$$

Модуль вектора скорости $v = \omega r \sin \vartheta = \omega \rho$, где ρ – радиус окружности, по которой движется точка A твердого тела. Продифференцировав равенство (10) по времени, найдем полное ускорение точки A :

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right], \Rightarrow \\ \vec{a} &= [\vec{\beta} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]]. \end{aligned} \quad (11)$$

Так как векторы $\vec{\beta}$ и $\vec{\omega}$ направлены вдоль оси вращения, первое слагаемое в (11) представляет собой тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau = [\vec{\beta} \times \vec{r}]$, а второе - нормальное $\vec{a}_n = [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]]$. Соответствующие проекции равны

$$a_\tau = \beta \rho; \quad a_n = \omega^2 \rho. \quad (12)$$

Модуль полного ускорения равен

$$\boxed{a = \rho \sqrt{\beta^2 + \omega^4}}.$$

Лекция 3. Основные законы динамики

Введем основные понятия. **Материальная точка** – это объект, размерами которого можно пренебречь в условиях данной задачи. **Система отсчета** – это совокупность тела отсчета, жестко связанной с ним системы координат и часов. Допустим, что существует такая система отсчета, в которой изменение скорости материальной точки обусловлено только ее взаимодействием с другими телами. Свободная материальная точка, на которую не действуют другие тела или поля, движется относительно такой системы отсчета прямолинейно и равномерно (= по инерции). Такую систему отсчета называют **инерциальной**.

Первый закон Ньютона(закон инерции Галилея-Ньютона):
существуют такие системы отсчета, называемые инерциальными, в которых материальная точка, на которую не действуют другие тела или поля, движется прямолинейно и равномерно.

Любая система отсчета, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно инерциальной, сама также является инерциальной. Действительно, переход к такой системе отсчета приведет к изменению скоростей всех тел на постоянную величину скорости системы отсчета, следовательно, скорость останется постоянной и в другой системе отсчета.

Симметрия пространства и времени. Опыт показывает, что в инерциальных системах отсчета пространство однородно и изотропно, а время однородно. Эти свойства выражают *симметрию* пространства и времени. Однородность и изотропность пространства означают, что свойства пространства одинаковы в различных его точках (однородность), а в каждой точке одинаковы во всех направлениях (изотропность). Однородность времени означает, что протекание физических явлений в разное время одинаково в одних и тех же условиях.

Принцип относительности Галилея: *Во всех инерциальных систе-*

мах отсчета все законы механики одинаковы. Никакими механическими опытами внутри данной инерциальной системы отсчета невозможно установить, покоится эта система или движется.

Преобразования Галилея. Пусть инерциальная система отсчета K' движется относительно другой инерциальной системы отсчета K со скоростью $\vec{V}$ вправо (рис.5) в направлении совмещенных осей x и x' . Начнем отсчет времени с момента, когда начала координат O и O' совпадали. Тогда соотношение между радиусами-векторами некоторой точки A в этих системах будет

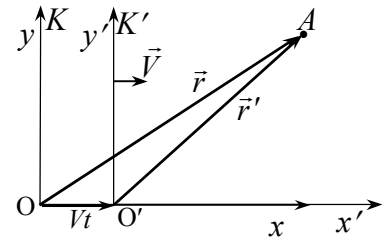


Рис.5

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t, \\ t = t'. \end{cases} \quad (13)$$

Это означает, что время течет одинаково в обеих системах, а длины отрезков не зависят от состояния движения. Соотношения (13) называются **преобразованиями Галилея**. В координатном виде преобразования имеют вид

$$x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \quad (14)$$

Продифференцировав первую из формул (13) по времени, находим преобразование Галилея для скоростей:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}. \quad (15)$$

Дифференцируя это выражение по времени с учетом того, что $\vec{V} = \text{const}$, получим для ускорений

$$\vec{a} = \vec{a}', \quad (16)$$

т.е. **ускорения одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.**

Масса и сила. Влияние на данное тело других тел, если его удалось описать количественно, называют **силой**. Следовательно, **сила – это мера**

воздействия. Все силы в механике можно разделить на силы, возникающие при непосредственном контакте тел, и силы, действующие через посредство полей (например, силы гравитационные или электромагнитные). Определение силы зависит от другого фундаментального понятия – массы.

Масса. Опыт показывает, что всякое тело «оказывает сопротивление» при любых попытках изменить его скорость. Это свойство называют инертностью. Мерой инертности служит масса: чем больше масса, тем более инертным является тело. Введем понятие массы, определив отношение масс двух тел по обратному отношению ускорений, сообщаемых им равными силами:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}. \quad (17)$$

Обратите внимание, как изящно сформулировано последнее предложение: не требуется предварительно вводить способ измерения сил. Достаточно указать источник одинаковых сил, например, разумно допустить, что одинаково растянутая пружина динамометра будет действовать на любую массу с одной и той же силой. Таким образом, сравнение масс двух тел, на которые действует одна и та же сила, сводится к сравнению ускорений этих тел. Выбрав эталон массы, мы имеем возможность сравнить массу любого тела с этим эталоном. Единицей массы в СИ является килограмм (кг). В рамках ньютоновской механики масса обладает следующими свойствами:

- 1] масса аддитивна, - это значит, что масса тела равна сумме масс его частей.
- 2] масса тела постоянна, она не зависит от того, движется тело, или нет.

Сила. Выше мы допустили, что одинаково растянутая пружина динамометра будет действовать на любую массу с одной и той же силой. С другой стороны, силу мы описали как причину ускорения тел, причем, как показывает опыт, разные массы получают разные ускорения. Одинаковым, как следует из (17) является произведение массы и ускорения: $m_1 \vec{a}_1 = m_2 \vec{a}_2$, которое логично принять за количественное определение силы. Поскольку ускорение –

вектор, сила тоже вектор. Окончательно, в классической механике **сила, действующая на тело массы m , определяется, как произведение $m\vec{a}$** .

Это утверждение отражает смысл второго закона Ньютона.

Второй закон Ньютона. Если $\vec{F} = m\vec{a}$, как мы только что договорились, то в чем тогда смысл второго закона Ньютона? Это просто определение силы, или что-то большее? Правильный ответ: да, нечто большее. Во-первых, во втором законе Ньютона под $\vec{F}$ понимают силу, далеко не всегда сводящуюся к прямому контакту при взаимодействии. Во-вторых, $\vec{F}$ может быть суммой многих сил, которые уравновесят друг друга и никакого ускорения не будет, а силы будут присутствовать вполне реально. В-третьих, сила в ряде случаев зависит от окружения данного тела и даже от его скорости (например, сила трения). В-четвертых, второй закон Ньютона можно сформулировать, не вводя понятие силы – в импульсной форме (**импульсом материальной точки называется произведение ее массы на скорость: $\vec{p} = m\vec{v}$**), и тогда он будет иметь более общий характер, чем дает формула $\vec{F} = m\vec{a}$, хотя в рамках классической механики это различие несущественно. Итак, классическая формулировка второго закона Ньютона такова.

В инерциальной системе отсчета ускорение тела пропорционально векторной сумме всех действующих на него сил, и обратно пропорционально его массе:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}}. \quad (18)$$

Можно дать и другое определение силы: сила есть производная от импульса тела по времени. Тогда **второй закон Ньютона в импульсной форме** можно сформулировать так

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \quad (19)$$

Скорость изменения импульса тела равна векторной сумме всех действующих на него сил.

Обратите внимание! Слова «**В инерциальной системе отсчета**»

присутствуют в законе не только для украшения! В обеих формулировках подразумевается, что принципиально существует независимый от них способ измерения сил. Второй закон Ньютона является основным расчетным законом динамики, поэтому его часто называют основным уравнением динамики материальной точки, или уравнением движения.

Принцип суперпозиции. Опыт показывает, что если есть тела, являющиеся источниками сил, то результирующая сила $\vec{F}$, действующая на данную материальную точку, равна

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n, \quad (20)$$

где $\vec{F}_i$ - сила, с которой действовало бы на данную материальную точку i -е тело в отсутствие других тел. Тогда говорят, что эти силы подчиняются *принципу суперпозиции*.

Третий закон Ньютона. Из опыта известно, что если на первое тело со стороны второго тела действует сила, то и на это второе тело со стороны первого действует точно такая же сила противоположного направления. Ньютон постулировал это в виде третьего закона:

Силы, с которыми две материальные точки действуют друг на друга, всегда равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (21)$$

Таким образом, обе силы равны по модулю одновременно. Это соответствует представлению о мгновенном распространении взаимодействий – *принцип*

дальнодействия ньютоновской механики. Следовательно, взаимодействие распространяется с бесконечно большой скоростью: изменение состояния тела

мгновенно обнаружится во всех взаимодействующих с ним телах, как бы далеко они не находились.

Законы Ньютона являются основными законами механики. В соответствии с принципом относительности Галилея, во всех инерциальных системах все законы механики одинаковы. Действительно, масса материальной точки и её ускорение одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Сила, следовательно, – тоже. Так как все три величины, входящие в формулу (18) не меняются, следовательно, и само основное уравнение динамики остается неизменным, иными словами, инвариантным относительно преобразований Галилея. Рассмотрим наиболее часто встречающиеся силы.

Лекция 4. Закон Всемирного тяготения. Гравитационное поле

Гравитационные силы. Закон Всемирного тяготения. Сила гравитационного притяжения между двумя материальными точками пропорциональна произведению масс точек m_1 и m_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей эти точки:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (22)$$

где коэффициент называется гравитационной постоянной. Массы в выражении (22) называются **гравитационными**, в отличие от ранее рассмотренных **инертных** масс. Экспериментально установлено, что гравитационная и инертная массы любого тела строго пропорциональны друг другу. Обычно их полагают равными, для чего выбирают один и тот же эталон для обеих масс. Введенное таким образом понятие массы является и мерой инертности тела и мерой его гравитационного взаимодействия с другими телами.

Для сравнения: кулоновская сила, величина которой также обратно пропорциональна квадрату расстояния, может быть как силой притяжения

(между разноименными зарядами), так и силой отталкивания (между одноименными зарядами). Если заряды движутся относительно друг друга, между ними возникает еще и магнитное взаимодействие, а закон Кулона перестает выполняться точно. Взаимодействие между движущимися заряженными телами обладает довольно сложной топологией и называется электромагнитным. Кулоновское и гравитационное взаимодействие лежат в основе всего разнообразия механических явлений, но не всегда разумно каждый случай сводить к этим двум фундаментальным взаимодействиям. Для упрощения часто бывает удобно использовать следующие приближенные силы.

Однородная сила тяжести: $\vec{F} = m\vec{g}$, где $\vec{g}$ - ускорение свободного падения, которое считается постоянным вблизи поверхности Земли. Обратите внимание! В отличие от силы тяжести $\vec{F}$, вес $\vec{P}$ - это сила, с которой тело действует на опору (или подвес), неподвижную относительно тела. Если тело и его опора неподвижны относительно Земли, то вес равен силе тяжести (однако эти силы приложены к разным предметам: сила тяжести – к телу, а вес – к его опоре).

Упругая сила – это сила, пропорциональная смещению материальной точки из положения равновесия и направленная к положению равновесия:

$$\vec{F} = -k\vec{r}, \quad (24)$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор, характеризующий смещение частицы от положения равновесия, k - коэффициент, зависящий от «упругих» свойств конкретной силы. Примером такой силы может быть сила упругой деформации при растяжении (сжатии) пружины или стержня, которая подчиняется до поры до времени закону Гука:

$$F = -k\Delta l,$$

где Δl - величина упругой деформации.

Силы трения и сопротивления. Различают **силу трения скольжения**, которая в некоторых пределах пропорциональна по модулю силе давления N , прижимающей трущиеся поверхности друг к другу: $F_{тр} = kN$, и **силу трения покоя**, величина которой зависит от других приложенных к телу сил. Например, если к покоящемуся телу, приложить горизонтальную силу $\vec{F}$, которая увеличивается от нуля, то сначала тело будет продолжать покоиться, а начиная с некоторого её значения тело начнет двигаться. Пока тело покоится, векторная сумма всех приложенных сил обязана быть равной нулю, поэтому сила трения покоя направлена противоположно $\vec{F}$ и равна ей по модулю; следовательно, сила трения покоя будет возрастать до момента, пока тело не начнет двигаться. Далее характер силы трения меняется, т.к. она становится силой трения скольжения $F_{тр} = kN$, т.е. постоянной, если постоянна сила N (рис.6). На графике наклонный участок соответствует силе трения покоя, а горизонтальный – силе трения скольжения. Силой сопротивления часто называют силу типа трения в жидкости или газе. Она зависит от скорости как $\vec{F}_c = -k\vec{v}$, или более сложным образом.

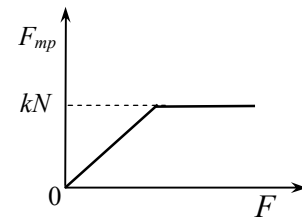


Рис.6

Лекция 5. Законы сохранения и симметрия пространства-времени.

Закон сохранения импульса

О законах сохранения. Любое тело или совокупность тел можно считать системой материальных точек. Движение системы можно описать уравнениями зависимости от времени координат и скоростей всех этих точек и решить в принципе любую механическую задачу. Однако из-за возрастания количества этих уравнений по мере усложнения системы довести решение до конца часто оказывается практически невозможным. Если же законы действия некоторых сил неизвестны, то тогда такой подход становится принципиально

невозможным. Обойти подобные трудности во многих случаях позволяют законы сохранения. Хотя состояние системы со временем может меняться достаточно сложным способом, существуют величины, которые обладают свойством сохраняться во времени. Наиболее важные из них: **энергия, импульс и момент импульса**. Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса связаны, как выяснилось к настоящему времени, с фундаментальными свойствами времени и пространства – однородностью и изотропностью. А именно: закон сохранения энергии связан с однородностью времени; закон сохранения импульса – с однородностью пространства; закон сохранения момента импульса связан с изотропностью пространства. Роль законов сохранения особенно возросла, после того, как выяснилось, что они далеко выходят за рамки механики и представляют собой универсальные законы природы.

Закон сохранения импульса. По определению, импульс частицы $\vec{p} = m\vec{v}$. Согласно основному уравнению (19) динамики (второму закону Ньютона) $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$. Отсюда следует, что если $\vec{F} = 0$, то $\vec{p} = const$. Уравнение (19) позволяет найти приращение импульса, если известна зависимость силы от времени. Действительно, $d\vec{p} = \vec{F}dt$. Поскольку известен вид функции $\vec{F}(t)$, можно это выражение проинтегрировать:

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_0^t \vec{F}(t)dt. \quad (25)$$

В частности, если $\vec{F} = const$, то этот вектор можно вынести из-под знака интеграла, и тогда

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{F}t.$$

Пусть теперь имеется произвольная система частиц. Силы ($\vec{F}_{ik}$) взаимодействия между частицами системы называются внутренними, а силы ($\vec{F}_i$)

взаимодействия частиц системы с телами, не входящими в систему, - внешними. Определим импульс системы как векторную сумму импульсов $\vec{p}_i$ (импульс i -й частицы) всех её частиц: $\vec{p} = \sum \vec{p}_i$. Продифференцируем это выражение по времени:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt}.$$

Запишем для каждой частицы $\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_k \vec{F}_{ik}$ и подставим в предыдущее уравнение:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i + \sum_k \sum_i \vec{F}_{ik},$$

где двойная сумма – это сумма всех внутренних сил, которая равна нулю, потому, что в ней каждая пара сил, $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$ по третьему закону Ньютона; иначе говоря, силы взаимодействия между частицами внутри системы попарно одинаковы по модулю и противоположно направлены. Поэтому результирующая каждой пары равна нулю, а значит, равна нулю и сумма этих нулей: $\sum_k \sum_i \vec{F}_{ik} = 0$. Остается только сумма внешних сил $\vec{F}_{внеш} = \sum_i \vec{F}_i$, поэтому

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{внеш}}. \quad (26)$$

Отсюда $d\vec{p} = \vec{F}_{внеш} dt$, что после интегрирования дает

$$\boxed{\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_0^t \vec{F}_{внеш} dt}. \quad (27)$$

Т.е. приращение импульса системы равно импульсу всех результирующих сил за промежуток времени t . Выражения (26,27) описывают изменение им

пульса системы материальных точек.

Система называется замкнутой (изолированной), если на неё не действуют внешние силы.

Согласно (26) импульс системы может измениться только под действием внешних сил. Отсюда вытекает **закон сохранения импульса: Импульс изолированной системы частиц остается постоянным:**

$$\boxed{\sum \vec{p}_i(t) = const.} \quad (28)$$

Следствия.

1 Импульс может сохраняться и у незамкнутой системы, если сумма всех внешних сил равна нулю, что непосредственно следует из (26 и 27).

2 У незамкнутой системы может сохраняться не сам импульс, а его проекция p_x на некоторое направление x . Это бывает тогда, когда проекция результирующей внешней силы на это направление равна нулю, т.е. вектор $\vec{F}_{внеш}$ перпендикулярен направлению x . Действительно, спроектировав уравнение (26) на направление x , получим $\frac{dp_x}{dt} = F_{внеш\ x}$, откуда следует, что если правая часть равна нулю, то равна нулю и производная слева, $\Rightarrow p_x = const$. Например, сохраняется проекция импульса системы на горизонтальное направление, если система находится в однородном поле сил тяготения.

Центр масс. Назовем центром масс системы частиц точку с радиус-вектором

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}, \quad (30)$$

где m – сумма масс частиц системы, m_i и $\vec{r}_i$ соответственно масса и радиус-вектор i -й частицы. Центр масс обладает замечательным свойством, которое мы обнаружим, продифференцировав (30), чтобы найти скорость:

$$\vec{V}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}.$$

Поскольку в числителе дроби стоит импульс системы, то его легко выразить через скорость центра масс:

$$\vec{p} = m \vec{V}_c. \quad (31)$$

Таким образом, **импульс системы равен произведению массы системы на скорость её центра масс**. Очевидно, если скорость центра масс равна нулю, то система в целом покоится, какие бы перемещения внутри неё не происходили.

Введение скорости центра масс $\vec{V}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}$, позволяет придать компактную форму уравнению (26):

$$m \frac{d\vec{V}_c}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}. \quad (32)$$

Это уравнение является уравнением движения центра масс – по форме вторым законом Ньютона. Откуда видно, что центр масс системы частиц движется так, как если бы вся масса системы была сосредоточена в этом центре, и к ней была бы приложена результирующая всех внешних сил. Если центр масс системы движется равномерно и прямолинейно, значит, - импульс системы сохраняется в процессе движения.

Лекции 6-7. Работа и энергия. Закон сохранения энергии в механике

Работа и мощность. Пусть частица под действием силы $\vec{F}$ совершает перемещение по некоторой траектории 1→2 (рис.7). Элементарной работой силы $\vec{F}$ при перемещении $d\vec{r}$ называется скалярное произведение этих

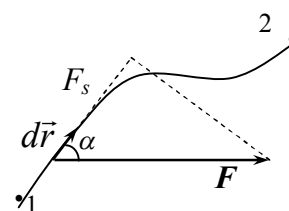


Рис.7

величин:

$$\delta A = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = F \cos \alpha \cdot ds = F_s ds, \quad (33)$$

где $ds = |d\vec{r}|$ - элементарный путь, F_s - проекция силы на касательное направление (на вектор $d\vec{r}$). Величина δA - скаляр, в частности равный нулю, если $\vec{F} \perp d\vec{r}$. Таким образом, сила, перпендикулярная перемещению, работы не совершает. Интегрируя выражение (33) по всем элементарным участкам траектории от точки 1 до точки 2, находим работу на всем пути $1 \rightarrow 2$:

$$A = \int_1^2 (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \int_1^2 F_s ds \quad (34)$$

Работа упругой силы. Пусть частица B перемещается по некоторой траектории $1 \rightarrow 2$ (рис.8) и на неё действует сила $\vec{F} = -k\vec{r}$, где $\vec{r}$ - радиус-вектор частицы B относительно некоторой точки O . При перемещении $d\vec{r}$ элементарная работа равна

$$\delta A = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = -k(\vec{r} \cdot d\vec{r}).$$

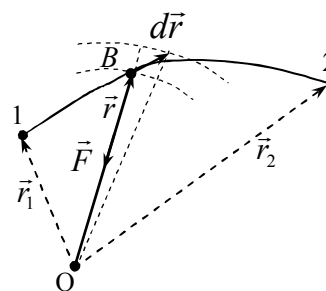


Рис.8

где

Из рисунка видно, что $(\vec{r} \cdot d\vec{r}) = r \cdot dr_r = r dr$,

dr - приращение модуля радиус-вектора, $\Rightarrow$

$$\delta A = -k r dr = -d \frac{kr^2}{2}.$$

Чтобы убедиться в правильности последнего преобразования, прочитайте его справа налево. Для вычисления работы на всем пути осталось только проинтегрировать:

$$A = - \int_{r_1}^{r_2} d \frac{kr^2}{2} = \frac{kr_1^2}{2} - \frac{kr_2^2}{2}. \quad (35)$$

Работа гравитационной (или кулоновской) силы. Мы воспользуемся опять рис.8, но слова будут другие,- будьте внимательны! Пусть в точке О находится неподвижный силовой центр – материальная точка, действующая на частицу В с силой $\vec{F}$, которая может быть представлена в виде $\vec{F} = \frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r$, где α - равна $(-\gamma m_1 m_2)$ – для гравитационного поля; $(k q_1 q_2)$ - для кулоновского. Единичный вектор (орт) $\vec{e}_r$ направлентакже, как $\vec{r}$ (он не изображен на рисунке). Элементарная работа этой силы равна $\delta A = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \frac{\alpha}{r^2} (\vec{e}_r \cdot d\vec{r})$, где последнее скалярное произведение равно dr . Поэтому $\delta A = \frac{\alpha dr}{r^2} = -d \frac{\alpha}{r}$, в чем легко убедиться, если прочесть последнее равенство справа налево. Осталось его проинтегрировать, и тогда работа на всем пути 1→2 равна

$$A = -\int_{r_1}^{r_2} d \frac{\alpha}{r} = \frac{\alpha}{r_1} - \frac{\alpha}{r_2}. \quad (36)$$

Работа однородной силы тяжести.

Запишем эту силу через орт $\vec{e}_z$ - единичный вектор направленный вертикально вверх: $\vec{F} = -mg\vec{e}_z$ (рис.9). Элементарная работа силы тяжести на перемещении $d\vec{r}$ равна

$$\delta A = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = -mg(\vec{e}_z \cdot d\vec{r}) = -mgdz = -d(mgz).$$

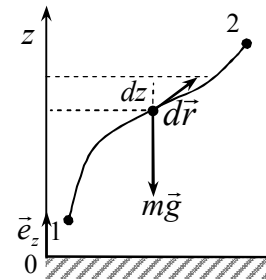


Рис.9

Работа этой силы на всем пути равна

$$A = -\int_{z_1}^{z_2} dm g z = mg(z_1 - z_2). \quad (37)$$

Обратите внимание! Во всех рассмотренных случаях величина работы зависела только от координат начальной и конечной точек траектории. Не все силы обладают таким свойством, например, работа силы трения от формы траектории зависит. Единицей работы в СИ является *джоуль (Дж)*.

Мощность— это работа, совершаемая силой в единицу времени. Если за время dt сила $\vec{F}$ совершает работу $\delta A = (\vec{F} \cdot d\vec{r})$, то мощность

$$P = \frac{\delta A}{dt} = \frac{(\vec{F} \cdot d\vec{r})}{dt} = (\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}) = (\vec{F} \cdot \vec{v}).$$

Итак

$$P = (\vec{F} \cdot \vec{v}). \quad (38)$$

Очевидно, чтобы найти работу, зная мощность, достаточно проинтегрировать

$$A = \int_0^t P dt. \quad (39)$$

Единицей мощности в СИ является *ватт (Вт)*, равный 1 Дж/с.

Консервативные силы. Если в каждой точке пространства на помещенную туда частицу действует сила, то говорят, что частица помещена в поле сил. Если поле не меняется со временем, то оно называется стационарным.

Некоторые стационарные поля обладают важным свойством: Работа сил поля, совершаемая его силами

при перемещении частицы между любыми точками поля

1 и 2, зависит только от координат (или радиус-векторов) этих точек. Силы, обладающие таким свойством, называются *консервативными*, а их поля *потенциальными*. Эквивалентная формулировка этого свойства гласит: поле является потенциальным, если работа его сил на любом замкнутом пути равна нулю. Чтобы убедиться в этом, разобьём произвольный замкнутый контур на две части:

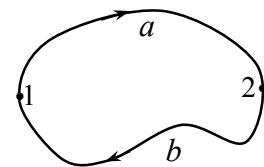


Рис.10

1a2 и 2b1 (рис.10). Тогда работа на замкнутом пути $A = A_{1a2} + A_{2b1}$. Поскольку $A_{1a2} = -A_{2b1}$, так как каждая из этих работ зависит только от координат точек 1 и 2, а при изменении порядка точек меняется и знак работы, то $A = 0$.

К числу неконсервативных сил относятся силы трения и сопротивления.

Поле центральных сил. Силы, зависящие только от расстояния между частицами, и направленные вдоль прямой, соединяющие эти частицы, называются центральными. Примерами центральных полей являются кулоновское, гравитационное и поле упругих сил. Центральную силу, действующую на частицу М со стороны частицы О (рис.11), можно представить в виде

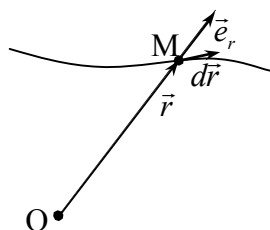
$$\vec{F} = f(r)\vec{e}_r,$$

где $f(r)$ - функция, зависящая только от расстояния r между частицами (рис.11). Докажем, что центральные силы являются консервативными.

Элементарная работа центральной силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$ равна

$$\delta A = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = f(r)(\vec{e}_r \cdot d\vec{r}).$$

Так как $(\vec{e}_r \cdot d\vec{r}) = dr$, то $\delta A = f(r)dr$. Работа этой силы на произвольном пути между точками 1 и 2 траектории равна



$$A_{12} = \int_1^2 f(r)dr.$$

Рис.11

Полученное выражение не зависит от траектории, а зависит только от вида функции $f(r)$ и значений радиус-векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ начальной и конечной точек траектории. Обобщим: пусть на частицу М действует не одна сила $\vec{F}$ со стороны точки О, а несколько сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$,

действующих со стороны системы материальных точек, причем каждая из этих сил является центральной. Тогда работа результирующей силы при перемещении частицы М из 1 в 2 равна алгебраической сумме работ отдельных сил. А так как работа каждой силы не зависит от траектории, то и работа результирующей силы также не зависит от пути.

Потенциальная энергия частицы в поле. То, что работа консервативных сил зависит только от начального и конечного положений частицы, дает возможность ввести понятие потенциальной энергии. Пусть в поле консервативных сил мы перемещаем (мысленно) из разных точек Π_i поля частицу в одну и ту же фиксированную точку О и каждый раз вычисляем соответствующую работу сил поля. Поскольку работа сил такого поля в принципе может зависеть только от координат начальной и конечной точек Π_i и О, причем при фиксированной точке О меняются только координаты точек Π_i , то в итоге эта работа $A_{\Pi O}$ будет функцией только координат (радиус-вектора) точки Π . Обозначим эту функцию $U(\vec{r})$, $\Rightarrow$

$$A_{\Pi O} = \int_{\Pi}^O (\vec{F}, d\vec{r}) = U(\vec{r}). \quad (40)$$

Функция $U(\vec{r})$ называется **потенциальной энергией**.

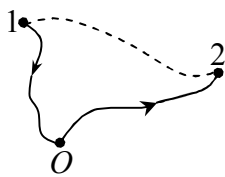


Рис.12

Найдем работу A_{12} сил поля при перемещении частицы из точки 1 в точку 2 (пунктир на рис.12). Поскольку поле консервативно, то эта работа не зависит от того, по какой траектории мы перемещаем частицу из 1 в 2 – по пунктирной линии, или через точку О (т.е. по пути

$1 \rightarrow O \rightarrow 2$),

$$\Rightarrow A_{12} = A_{1O} + A_{O2} = A_{1O} - A_{2O} = \int_1^2 (\vec{F}, d\vec{r}) = U_1 - U_2. \quad (41)$$

Выражение справа – это убыль потенциальной энергии. Потому, что прибыль (т.е. приращение – это $U_2 - U_1$). Таким образом,

$$A_{12} = U_1 - U_2, \Rightarrow$$

работа сил поля на пути 1→2 равна убыли потенциальной энергии частицы в этом поле. Очевидно, что работа сил поля определяет лишь разность потенциальных энергий, но не их абсолютное значение, $\Rightarrow$ потенциальная энергия определена (как первообразная!) с точностью до произвольной постоянной. И наоборот, если нам удалось представить работу как убыль некоторой функции координат, то эта функция и есть потенциальная энергия. Несколько раньше мы уже вычисляли эту работу для полей упругой и гравитационной (кулоновской) сил и получили во всех случаях разность значений соответствующей функции (см. формулы 35-37), из чего немедленно следует, что потенциальная энергия в данных силовых полях имеет вид:

1 в поле упругой силы $U(r) = \frac{kr^2}{2} + \text{const};$

2 в гравитационном (кулоновском) поле $U(r) = \frac{\alpha}{r} + \text{const};$

3 в однородном поле сил тяжести $U(z) = mgz + \text{const}.$

Как следует из (41), $(\vec{F}, d\vec{r}) = -dU, \Rightarrow F dr \cos \alpha = -dU, \Rightarrow F_r dr = -dU, \Rightarrow$

$$F_r = -\frac{dU}{dr}.$$

Поскольку dr – это модуль малого перемещения вдоль траектории, F_r – это проекция силы на направление этого перемещения, т.е. на любое направление, вдоль которого нам вздумалось перемещаться, то удобнее эту мысль переформулировать так: **проекция силы на произвольное направление x в потенциальном поле равна минус производной от потенциальной энергии по координате:**

$$\boxed{F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}}. \quad (42)$$

Здесь вместо символов d использованы символы ∂ для обозначения частных производных. Это значит, что во время дифференцирования функции $U(x,y,z)$ по одной из координат, с остальными координатами обращаются как с константами.

Кинетическая энергия частицы. Теорема о кинетической энергии.

Рассмотрим частицу, движущуюся под действием некоторой силы, равной по второму закону Ньютона $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$. При перемещении $d\vec{r} = \vec{v}dt$ элементарная работа этой силы

$$\delta A = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = m(\vec{v} \cdot d\vec{v}).$$

Поскольку $(\vec{v} \cdot d\vec{v}) = v dv$, где dv - приращение модуля скорости, а

$$\frac{dv^2}{2} = \frac{2v dv}{2} = v dv, \text{ то } (\vec{v} \cdot d\vec{v}) = \frac{dv^2}{2}, \Rightarrow$$

$$\delta A = d \frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда видно, что работа силы $\vec{F}$ идет на приращение величины $\frac{mv^2}{2}$. Эта величина называется кинетической энергией:

$$\boxed{K = \frac{mv^2}{2}}. \quad (43)$$

Проинтегрируем выражение, учитывая, что $\delta A = d \frac{mv^2}{2} = dK : \Rightarrow$

$$\int_1^2 dK = K_2 - K_1 = \int_1^2 \delta A = A_{12}.$$

И окончательно

$$K_2 - K_1 = A_{12} . \quad (44)$$

Мы доказали теорему о кинетической энергии: **Приращение кинетической энергии частицы на перемещении из точки 1 в точку 2 равно алгебраической сумме работ всех сил, действующих на частицу на том же перемещении.** Очень рекомендую использовать именно эту теорему вместо закона сохранения энергии в случаях, когда в задаче имеется единственная частица.

Кинетическая энергия системы частиц. Определим кинетическую энергию системы частиц как сумму кинетических энергий всех составляющих систему частиц:

$$K = \sum_i \frac{mv_i^2}{2} . \quad (45)$$

Опишем **состояние системы** в некоторый момент времени как совокупность положений всех её частиц. Пусть в течение некоторого времени i -я частица системы переместилась из точки i_1 в точку i_2 . По теореме о кинетической энергии: $K_{i2} - K_{i1} = A_{i1i2}$, где $K_i = \frac{mv_i^2}{2}$. Поскольку каждая частица системы могла за это время переместиться в новое положение, то изменилось и состояние системы в целом: система перешла из состояния 1 в состояние 2. Просуммируем изменения кинетической энергии всех частиц системы, тогда изменение кинетической энергии при переходе из состояния 1 в состояние 2 равно сумме работ всех сил, действующих на частицы системы – внешних и внутренних, как потенциальных, так и непотенциальных:

$$K_2 - K_1 = A_{\text{ном}} + A_{\text{непом}} . \quad (46)$$

Механическая энергия. Согласно определению потенциальной энергии, работа потенциальных сил равна убыли потенциальной энергии в начальном и конечном состояниях: $A_{\text{ном}} = U_1 - U_2$. Таким образом,

$$K_2 - K_1 = (U_1 - U_2) + A_{\text{непом}} , \Rightarrow$$

$$(K_2 + U_2) - (K_1 + U_1) = A_{\text{непот}}. \quad (47)$$

Выражение в круглых скобках называется полной механической энергией системы, или просто механической энергией. Механическая энергия системы равна сумме её кинетической и потенциальной энергий:

$$E = K + U. \quad (48)$$

Выражение (47) можно переписать:

$$(E_2) - (E_1) = A_{\text{непот}}. \quad (49)$$

Мы получили закон изменения механической энергии: ***изменение механической энергии системы равно работе всех непотенциальных сил (как внешних, так и внутренних).***

Закон сохранения энергии в механике. Если непотенциальных сил нет, или их работа равна нулю, то очевидно, $E_2 - E_1 = 0$, откуда следует закон сохранения энергии в механике:

в отсутствие непотенциальных сил полная механическая энергия изолированной (или находящейся во внешнем потенциальном поле) системы сохраняется.

Обратите внимание!

[1] Мы неявно предположили, что работу всех потенциальных сил мы «упаковали» в виде потенциальной энергии. Потенциальная энергия системы в общем случае включает в себя потенциальную энергию взаимодействия частиц системы и потенциальную энергию системы во внешнем потенциальном поле (если оно есть). В некоторых случаях работу внешних потенциальных сил бывает удобно не включать в изменение потенциальной энергии системы и тогда потенциальная энергия состоит только из энергии взаимодействия составляющих её частиц. В этом случае закон изменения энергии в механике следует формулировать иначе: ***изменение механической энергии системы***

равно суммарной работе всех внешних сил (потенциальных и непотенциальных) ***и непотенциальных внутренних сил.***

2 В применении этого закона есть тонкости, которые не очевидны из данных выше формулировок. Если наша система состоит из обычных тел (камни, кирпичи, бруски на наклонной плоскости, шарики и т.п.), то силой гравитационного притяжения между ними можно пренебречь из-за её малости, зато потенциальную энергию во внешнем гравитационном поле (Земли) всегда включают в потенциальную энергию системы. Если при этом «на тело действует сила $\vec{F}$ », то обычно студент не понимает, куда включать её работу? С одной стороны, она вроде бы внешняя, $\Rightarrow$ не следует включать её работу в потенциальную энергию; с другой стороны она, как правило, потенциальная (в частности, постоянная), поэтому - надо включать? Совет: не включайте и тогда используйте закон изменения энергии в механике в форме: ***изменение механической энергии системы равно суммарной работе всех внешних и непотенциальных внутренних сил***

Применение законов сохранения к задаче о столкновениях шаров.

Существует большое количество задач, связанное с двумя типами столкновений: упругие и неупругие. Обратите внимание! В этом разделе для компактности векторы обозначены жирным шрифтом, как в учебниках (а не стрелочкой над буквой!) и введена нумерация формул только для этого раздела.

При ***абсолютно упругом*** ударе выполняются

1. Закон сохранения импульса (ЗСИ), 2. Закон сохранения энергии

(ЗСЭ). Пусть скорости тел равны до столкновения $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, после - $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$. Если удар центральный, то векторы $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ лежат на одной прямой! Запишем оба закона сохранения (ЗСЭ умножим на 2)

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2$$

$$m_1 \mathbf{v}_1^2 + m_2 \mathbf{v}_2^2 = m_1 \mathbf{u}_1^2 + m_2 \mathbf{u}_2^2 .$$

В обоих уравнениях перенесем все, что касается m_1 в левую часть, а m_2 - в правую. Заодно во втором уравнении представим разность квадратов скоростей как произведение их суммы на разность

$$m_1 (v_1 - u_1) = m_2 (u_2 - v_2)$$

$$m_1 (v_1 - u_1)(v_1 + u_1) = m_2 (u_2 - v_2)(u_2 + v_2),$$

Из сравнения этих уравнений и следует, что

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2.$$

Умножим последнее уравнение на m_1 и сложим с уравнением

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \Rightarrow$$

$$m_1 v_1 + m_1 u_1 + m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_2 + m_1 v_2 + m_1 u_1 + m_2 u_2,$$

где после приведения подобных членов неизвестной останется только скорость u_2 :

$$2m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_2 + m_1 v_2 + m_2 u_2, \Rightarrow$$

$$u_2 = \frac{v_2 (m_2 - m_1) + 2v_1 m_1}{m_1 + m_2}.$$

Для нахождения u_1 уравнение $v_1 + u_1 = u_2 + v_2$ умножим на m_2 и вычтем из него уравнение $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$. После приведения подобных членов аналогично получаем u_1 :

$$u_1 = \frac{v_1 (m_1 - m_2) + 2v_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

При *абсолютно неупругом* ударе выполняется только **Закон сохранения импульса (ЗСИ)**. Закон сохранения энергии не выполняется, так как часть механической энергии переходит во внутреннюю за счет неупругой

деформации. При этом после столкновения скорость у тел одинакова - они движутся как единое тело. В соответствии с законом сохранения импульса

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{u},$$

откуда легко выразить скорость тел $\mathbf{u}$ после столкновения:

$$\mathbf{u} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Обратите внимание! В данных выводах все скорости представлены векторно. Поэтому в каждой конкретной задаче нужно сначала сделать рисунок, выбрать ось для проектирования, а затем спроектировать полученные здесь формулы на ось с учетом знаков проекций скоростей!

Лекция 8. Закон сохранения момента импульса

Момент импульса частицы. Момент силы. Моментом импульса частицы A (рис.13) относительно точки O называется вектор $\vec{L}$, равный векторному

произведению векторов $\vec{r}$ и $\vec{p}$:

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}], \quad (50)$$

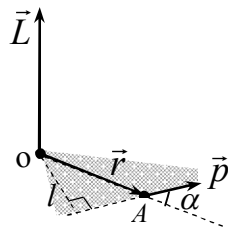


Рис.13

модуль которого равен

$$L = r p \sin \alpha = l p, \quad (51)$$

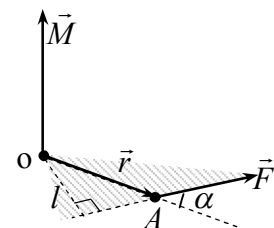


Рис.14

где величина $l = r \sin \alpha$, - длина перпендикуляра, опущенного из точки O на линию вектора импульса, называется плечом вектора импульса $\vec{p}$.

Моментом силы относительно точки O называется вектор $\vec{M}$, равный векторному произведению векторов $\vec{r}$ и $\vec{F}$ (рис.14):

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]. \quad (52)$$

Уравнение моментов. Продифференцируем (50) по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \right].$$

Вектор скорости $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ совпадает по направлению с вектором $\vec{p} = m\vec{v}$,

поэтому первое слагаемое равно нулю. По второму закону Ньютона $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$,

поэтому второе слагаемое представляет собой момент силы. Так мы приходим к уравнению моментов: **производная по времени от момента импульса**

частицы относительно некоторой точки O равна моменту

равнодействующей силы относительно той же точки:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (53)$$

Из уравнения моментов (53) следует, что если $\vec{M} = 0$, то $\vec{L} = \text{const}$. Другими словами, если момент всех сил, действующих на частицу, равен нулю, то момент импульса частицы относительно той же точки остается постоянным.

Момент импульса и момент силы относительно оси. Пусть относительно некоторой точки O на неподвижной оси Z момент импульса частицы A равен $\vec{L}$, а момент сил, действующих на частицу, равен $\vec{M}$ (рис.15). Моментом импульса L_z относительно оси Z называют про-

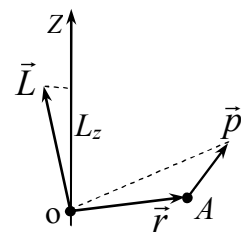


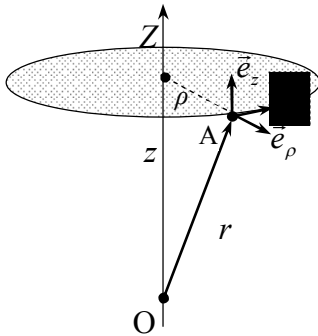
Рис.15

екцию вектора $\vec{L}$ на ось Z . Моментом силы относительно оси Z называют проекцию вектора $\vec{M}$ на ось Z . Записав уравнение (53) в проекциях на ось Z , получим

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (54)$$

Производная по времени от проекции момента импульса частицы относительно некоторой оси Z равна проекции момента

равнодействующей силы относительно той же оси.



Если момент силы относительно некоторой неподвижной оси равен нулю, то момент импульса относительно той же оси остается постоянным. Найдем выражения для L_z и M_z . Для этого удобно ввести цилиндрическую систему координат: ρ, φ, z , связав с частицей A орты $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$, направленные в сторону возрастания соответствующих координат (рис.16). В

этой системе радиус-вектор $\vec{r}$ и импульс $\vec{p}$ частицы можно записать так

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z;$$

$$\vec{p} = p_\rho \vec{e}_\rho + p_\varphi \vec{e}_\varphi + p_z \vec{e}_z.$$

Запишем векторное произведение в выражении момента импульса $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$ в виде определителя матрицы

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \rho & 0 & z \\ p_\rho & p_\varphi & p_z \end{vmatrix},$$

откуда видно, что проекция момента импульса на ось Z равна

$$L_z = \rho p_\varphi = m \rho^2 \omega, \quad (55)$$

где ρ - расстояние частицы от оси Z ; $p_\varphi = m v_\varphi = m \rho \omega$, где ω - проекция угловой скорости на ось Z . Аналогично запишем момент силы:

$$M_z = \rho F_\varphi. \quad (56)$$

Закон сохранения момента импульса. Определим момент импульса системы частиц, как векторную сумму моментов импульсов её отдельных частиц:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i, \quad (57)$$

а суммарный момент сил, приложенный к системе, как $\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i$, где все

векторы определены относительно одной и той же точки O , лежащей на

некоторой неподвижной оси $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{(внеш)}$. Продифференцируем выражение (57)

по времени: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt}$. Производная $\frac{d\vec{L}_i}{dt}$ равна моменту всех сил,

действующих на i -ю частицу. Представим момент всех сил $\vec{M}$ как сумму моментов внутренних и внешних сил:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_{i(внутр)} + \sum_i \vec{M}_{i(внеш)} = \vec{M}_{(внутр)} + \vec{M}_{(внеш)}.$$

Суммарный момент всех

внутренних сил относительно любой точки равен нулю. Действительно, силы взаимодействия между точками внутри системы - это силы взаимодействия между всеми парами точек. Две силы в каждой паре равны по модулю и противоположно направлены по третьему закону Ньютона. Поэтому и их моменты относительно любой точки равны по модулю и противоположно направлены. Следовательно, суммарный момент всех внутренних сил равен нулю. В результате последнее уравнение приобретает вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{(внеш)}. \quad (58)$$

Это значит: **производная момента импульса системы по времени равна суммарному моменту всех внешних сил**. Из уравнения (58) следует, что приращение момента импульса системы за конечный промежуток времени t

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_0^t \vec{M}_{(внеш)} dt . \quad (59)$$

Это значит: **приращение момента импульса системы равно импульсу суммарного момента всех внешних сил**. Отсюда непосредственно вытекает **Закон сохранения момента импульса**. Действительно, для изолированной (замкнутой) системы внешних сил нет, следовательно, правая часть в выражении (59) равна нулю. И тогда **момент импульса замкнутой системы частиц остается постоянным**: $\vec{L} = const$. В более частном случае унезамкнутых систем может сохраняться не сам момент импульса, а его проекция на некоторую неподвижную ось. Это бывает тогда, когда проекция суммарного момента всех внешних сил на эту ось равна нулю. Действительно, проекция уравнения (58) на некоторую неподвижную ось Z выглядит так:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_{z(внеш)} .$$

Если $M_{z(внеш)} = 0$, то $L_z = const$.

Лекция 9. Вращение твердого тела. Уравнение моментов

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Твердое тело можно представить как систему материальных точек. Тогда момент импульса относительно неподвижной оси Z согласно формуле (55), можно записать $L_z = \sum L_{iz} = (\sum m_i \rho_i^2) \omega_z$, так как проекция угловой скорости у всех точек твердого тела одинакова. Введем обозначение $I = \sum m_i \rho_i^2$, тогда

$$L_z = I\omega_z. \quad (60)$$

Величина

$$I = \sum m_i \rho_i^2, \quad (61)$$

где m_i – масса i -й материальной точки, ρ_i – ее расстояние до оси вращения, называется **моментом инерции твердого тела**, который, очевидно, зависит от распределения масс m_i относительно оси вращения. Для вычисления момента инерции тела можно в формуле (61) перейти к пределу, тогда

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dV, \quad (62)$$

где dm и dV – масса и объем элемента тела, находящегося на расстоянии r от оси Z ; ρ – в последней формуле плотность тела в dV . Моменты инерции некоторых однородных твердых тел представлены в таблице 1.

Таблица 1.

Моменты инерции некоторых тел

Твердое тело	Положение оси Z	Момент инерции
Тонкий стержень длины l	Перпендикулярна стержню, проходит через его середину	$\frac{ml^2}{12}$
Тонкий стержень длины l	Перпендикулярна стержню, проходит через конец стержня	$\frac{ml^2}{3}$
Сплошной цилиндр радиуса R	Совпадает с осью цилиндра	$\frac{mR^2}{2}$
Тонкий диск радиуса R	Перпендикулярна диску, проходит через центр	$\frac{mR^2}{2}$
Тонкий диск радиуса R	Совпадает с диаметром диска	$\frac{mR^2}{4}$
Шар радиуса R	Проходит через центр	$\frac{2mR^2}{5}$

В некоторых случаях вычисление момента инерции значительно упрощается, если воспользоваться **теоремой Штейнера**: **момент инерции I относительно произвольной оси Z равен моменту инерции I_c относительно оси Z_c , параллельной данной и проходящей через центр масс тела, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния a между осями:**

$$I = I_c + ma^2. \quad (63)$$

Таким образом, если известен момент инерции I_c , то нахождение момента инерции элементарно. Например, момент тонкого стержня длины l , относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец, равен

$$I = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}.$$

Основное уравнение динамики вращения твердого тела. Запишем уравнение (58) в проекции на неподвижную ось Z :

$$\frac{dL_z}{dt} = M_{z(внеш)}. \quad (64)$$

Поскольку момент инерции I остается постоянным для данного твердого тела, то, подставляя $L_z = I\omega_z$ в (64), получим

$$\frac{dI\omega_z}{dt} = \frac{Id\omega_z}{dt} = M_{z(внеш)}, \Rightarrow$$

$$\boxed{I\beta_z = M_{z(внеш)}}. \quad (65)$$

Кинетическая энергия вращающегося твердого тела относительно неподвижной оси. Поскольку скорость i -й частицы твердого тела равна

$v_i = \rho_i \omega$, тогда кинетическую энергию тела можно записать как сумму кинетических энергий составляющих его частиц

$$K = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \left(\sum m_i \rho_i^2 \right) \frac{\omega^2}{2} = \frac{I \omega^2}{2}.$$

Таким образом, кинетическая энергия вращающегося тела

$$K = \frac{I \omega^2}{2}. \quad (66)$$

Работа внешних сил при вращении твердого тела вокруг

неподвижной оси. В этом случае работа всех внешних сил, действующих на твердое тело, равна приращению только кинетической энергии тела, так как его потенциальная энергия при этом не меняется, $\Rightarrow$

$$\delta A = dK = d \frac{I \omega^2}{2} = I \omega d\omega,$$

где ω - проекция угловой скорости на ось вращения (т.е. $\omega = \omega_z$). Так как

$$\frac{I d\omega_z}{dt} = M_z^{(внеш)}, \Rightarrow I d\omega = M_z dt, \Rightarrow \delta A = M_z \omega dt = M_z d\varphi, \Rightarrow$$

$$\delta A = M_z d\varphi, \Rightarrow$$

$$A = \int_0^\varphi M_z d\varphi. \quad (67)$$

При $M_z = const$, работа вычисляется ещё проще: $A = M_z \varphi$. Если силы таковы, что их момент $M_z = 0$, то работы они не производят.

Кинетическая энергия при плоском движении твердого тела.

Примерами плоского движения твердого тела являются: шар, цилиндр или диск, катящийся по горизонтальной или наклонной плоскости и т.п. Можно показать, что при этом кинетическая энергия складывается из суммы

кинетических энергий вращения вокруг оси симметрии, проходящей через центр масс, и поступательного движения центра масс:

$$K = \frac{I_c \omega^2}{2} + \frac{mV_c^2}{2}. \quad (68)$$

Здесь есть тонкости, о которых студент обычно не догадывается, поэтому и не допускает ошибок.

Лекция 10. Гармонические колебания.

Гармоническими называются колебания, в которых величина x изменяется по закону

$$x = a \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (69)$$

где a – амплитуда, $(\omega_0 t + \alpha)$ – фаза, α – начальная фаза, $\omega_0 = 2\pi\nu$, – циклическая частота. Период колебаний T , а также частоты ν и ω_0 связаны:

$$T = 1/\nu = 2\pi/\omega_0 \quad (70)$$

Обратите внимание на наименования

единиц измерения: $[\omega] = c^{-1}$, $[\nu] = \Gamma\mathcal{U}$.

Продифференцировав (69) по времени, найдем скорость $\dot{x}$ и ускорение $\ddot{x}$

$$\dot{x} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad ;$$

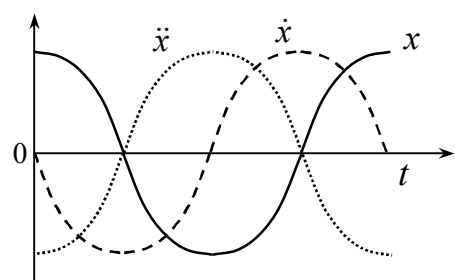


Рис.17

$$\ddot{x} = -a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha). \quad (71)$$

Графики на рис.17 показывают, что x и $\ddot{x}$ находятся в противофазе, а скорость $\dot{x}$ опережает смещение x на $\pi/2$.

Наиболее часто встречающееся заблуждение состоит в том, что учащиеся думают, что на рис.17 изображена траектория. **НЕТ!** Это *графики!* Зависимости x (и производных) *от времени!* Притом при нулевой начальной фазе и одинаковых по масштабу амплитудах! Движение одномерное! Поэтому траектория – набор отрезков вдоль вертикальной оси x .

Дифференциальное уравнение гармонического осциллятора. Выражения для смещения x и ускорения $\ddot{x}$ отличаются только коэффициентом при $\cos(\dots)$.

Поэтому $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$, или

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (72)$$

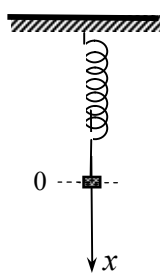
Это и есть *дифференциальное уравнение гармонического осциллятора*.

Функция (69) - *общее решение этого уравнения*. Оно содержит две произвольные константы a и α . Их можно найти из *начальных условий*, например, если даны смещение x_0 и скорость $\dot{x}_0$ в начальный момент $t=0$:

$$x_0 = a \cos \alpha ; \quad \dot{x}_0 = -a \omega_0 \sin \alpha .$$

Что же такое гармонический осциллятор? Ответ очевиден: кто меняет свою *единственную* координату по уравнению (69) – тот и есть гармонический осциллятор. Простейшими примерами гармонических осцилляторов являются грузик на пружинке, математический маятник, физический маятник. И пример для гурманов – вертикальные колебания льдины на воде. Попробуйте понять, что между этими примерами общего.

Грузик на пружине (пружинный маятник). Пусть грузик массы m



подвешен на невесомой пружине жесткостью k . Смещение x будем отсчитывать от положения равновесия (рис.18). В *состоянии равновесия* пружина растянута под действием силы тяжести mg груза настолько, чтобы сила упругости была в точности равна $-mg$. Поскольку эти постоянные силы равны и противоположно направлены, они в сумме всегда равны нулю. ***B***

Рис.18

процессе колебаний сила упругости будет состоять из двух частей: (1) постоянной составляющей равной mg и (2) переменной составляющей равной kx . Таким образом, в записи второго закона Ньютона для грузика можно не учитывать силу тяжести mg и постоянную составляющую силы упругости (равную $-mg$). Тогда произведение массы на ускорение равно переменной составляющей силы упругости

$$m\ddot{x} = -kx. \quad (73)$$

Редкий ученик понимает, почему справа минус. Возьмите пружинку (хоть из авторучки) и попробуйте её растянуть и сжать. Что Вы заметили? Когда пружину сжимают, она стремится распрямиться (смещение вверх, сила упругости вниз), а когда растягивают, она стремится сжаться (смещение вниз, сила упругости вверх). Таким образом, знаки смещения x и силы kx всегда противоположны, поэтому и минус. Теперь перенесем $-kx$ влево и разделим уравнение (73) на m

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Правда, похоже на (72)? Чтобы сходство стало полным, обозначим $k/m \equiv \omega_0^2$. Тогда получим $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, т.е. уравнение (72) гармонического осциллятора.

Мораль: **коэффициент при x в дифференциальном уравнении гармонического осциллятора равен квадрату циклической частоты этого осциллятора**. Если конечно Вы не забыли все уравнение предварительно разделить на коэффициент при $\ddot{x}$! А чему же равно x ? Раз получено уравнение, идентичное дифференциальному уравнению (72), $\Rightarrow$ (69) - его общее решение. Пора спросить: а все ли помнят, что точка над x обозначает первую производную **по времени** от x ? А две точки над x ?

Из равенства $\omega_0^2 = k/m$ следует, что циклическая частота пружинного маятника, зависит от жесткости пружины и массы груза: чем жестче пружина –

тем больше частота, чем больше масса груза, тем меньше частота. С периодом все наоборот:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (74)$$

Пример: во сколько раз увеличится период колебаний пружинного маятника, если его массу и жесткость пружины увеличить в 2 раза? Ответ: не изменится.

А если массу увеличить в 8 раз, а жесткость пружины увеличить в 2 раза?

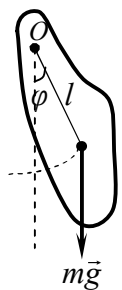
Ответ: в два раза. И так далее.

Физический маятник. Это твердое тело, совершающее малые колебания относительно неподвижной оси O , перпендикулярной листу (рис. 19).

Запишем основное уравнение динамики вращательного движения в проекции на ось вращения O

$$I \cdot \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi \quad (75)$$

(слева произведение момента инерции I на угловое ускорение, справа – момент силы тяжести). Чтобы понять, откуда справа минус, вспомним, куда



направлены угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ и момент силы $m\vec{g}$. Правильно, оба вектора вдоль оси вращения. А почему всегда в разные стороны?

Спрошу на экзамене! Разделим обе части на I ; учтем, что для малых углов $\sin \varphi \approx \varphi$; перенесем все в левую часть, обозначим

$mgl/I \equiv \omega_0^2$ и получим опять дифференциальное уравнение

гармонического осциллятора

Рис.19

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (76)$$

только роль смещения вместо x выполняет угол φ . Решение уравнения (76)

также совпадает с формулой (69) с точностью до обозначений:

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha),$$

где амплитуда обозначена φ_0 . Циклическая частота и период колебаний физического маятника равны

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (77)$$

Такую же частоту и период имеет математический маятник длины $l_{np} = I/ml$, которую называют **приведенной длиной** физического маятника.

Математический маятник - это частица массы m , совершающая *малые* колебания на нити длиной l (в плоскости листа - на рис.20). Основное уравнение динамики вращательного движения будет отличаться только тем, что момент инерции частицы известен (ml^2), $\Rightarrow ml^2 \cdot \ddot{\varphi} = -mgl \sin \varphi$. Разделим обе части на ml^2 ; учтем, что для малых углов $\sin \varphi \approx \varphi$; перенесем все в левую часть и получим дифференциальное уравнение гармонического осциллятора (76), где на этот раз $\omega_0^2 = g/l$, $\Rightarrow$ циклическая частота и период колебаний математического маятника равны

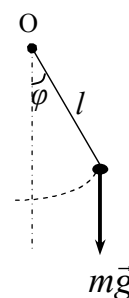


Рис.20

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (78)$$

Похоже на выражения (77), но есть и различие: период (и обе частоты) математического маятника **не зависят от его массы!** А зависят только от $\vec{g}$!

Отсюда простейший способ измерения ускорения свободного падения $\vec{g}$. Берем нить известной длины с грузиком и измеряем период его колебаний.

Подставляем в (78) и находим $\vec{g}$.

Пример: во сколько раз увеличится период колебаний математического маятника, если его массу увеличить в 2 раза и длину нити увеличить в 2 раза? Ответ: в $\sqrt{2}$. А если массу увеличить в 8 раз, а длину нити увеличить в 4 раза? Ответ: в 2 раза. И масса в обоих случаях не при чем!

Свободные колебания любого осциллятора без трения будут гармоническими, если действующая сила направлена к положению равновесия и пропорциональна смещению от положения равновесия.

Сложение гармонических колебаний одного направления. Можно условно изображать колебания с помощью **вектора амплитуды** $\vec{a}$, вращающегося с угловой скоростью ω против часовой стрелки, так как проекции этого вектора изменяются по гармоническому закону.

Действительно, угол вектора $\vec{a}$ с осью x в момент времени t равен $(\omega t + \alpha)$, а его проекция на ось x равна $a \cos(\omega t + \alpha)$. Проекция вектора суммы двух векторов равна сумме однонаправленных гармонических колебаний. Такой способ называется **векторной диаграммой**. Мы рассмотрим два случая: **1** - когда частоты складываемых колебаний равны, **2** - когда они *мало* отличаются. Термины “*мало-много*” требуют обязательного уточнения: по сравнению с чем? Всем известно, что три волоса на голове – это мало, а в тарелке – много! В данном случае уточнение состоит в том, что разность складываемых частот много меньше каждой из них. Обязательно обращайтесь внимание на уточнение! Оно неизбежно будет использовано при выкладках. Так, мы недавно использовали (дважды!) термин *малые* колебания. А уточнение состояло в том, что для них $\sin \varphi \approx \varphi$.

1 Пусть складываются гармонические колебания x_1 и x_2 с **одинаковой частотой** ω . Тогда результирующее смещение равно

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1) +$$

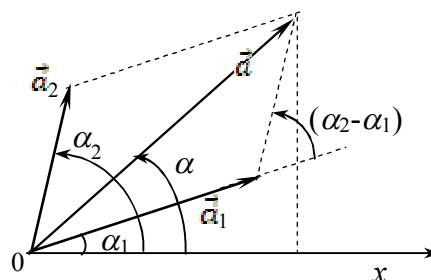


Рис.21

$$a_2 \cos(\omega t + \alpha_2) = a \cos(\omega t + \alpha).$$

Изобразим колебания векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, которые в начальный момент составляют с осью x углы α_1 и α_2 соответственно (рис.21). Амплитуду a и начальную фазу α результирующего колебания можно найти, как видно из рисунка, из соотношений

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (79)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2}. \quad (80)$$

Из (79) видно, что амплитуда результирующего колебания существенно зависит от разности фаз $(\alpha_2 - \alpha_1)$. При сложении **синфазных** колебаний (т.е. таких, что $(\alpha_2 - \alpha_1) = 0$) результирующая амплитуда максимальна,

а при сложении колебаний в противофазе $(\alpha_2 - \alpha_1 = \pi)$, - минимальна:

$$a_{\max} = a_1 + a_2; \quad a_{\min} = |a_1 - a_2|.$$

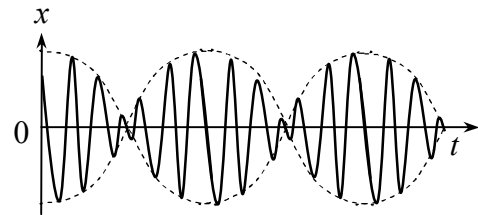


Рис.22

2 Пусть $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1$ и $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_2$. Это

значит, **частоты мало отличаются!** В этом случае справедлив рис.22. Но теперь векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ вращаются с немного отличающимися угловыми скоростями, модуль результирующего вектора $\vec{a}$ будет **медленно** изменяться от $a_{\max}$ до $a_{\min}$. Причем сам вектор $\vec{a}$ вращается с угловой скоростью, близкой к ω_1 и ω_2 . Строго говоря, результирующее колебание не является гармоническим. Его можно рассматривать, как почти гармоническое, но с медленно периодически изменяющейся амплитудой (рис.22). Такие колебания называются **биениями**. Результирующая амплитуда также может быть

выражена формулой (79), но теперь разность фаз $(\alpha_2 - \alpha_1)$ следует заменить выражением $\delta = (\alpha_2 - \alpha_1) + (\omega_2 - \omega_1)t$.

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть складываются гармонические колебания x и y **одинаковой частотой ω**

$$x = a \cos \omega t \text{ и } y = b \cos(\omega t + \alpha). \quad (81)$$

Выражение для y можно представить как $y = b \sin(\omega t + \delta)$, где $\alpha + \delta = 90^\circ$.

Перепишем выражения (81) в виде

$$\frac{x}{a} = \cos \omega t; \quad \frac{y}{b} = \sin(\omega t + \delta). \quad (82)$$

Если возвести оба уравнения в квадрат, расписать синус суммы, сложить уравнения и учесть что $\sin^2 \dots + \cos^2 \dots = 1$, то можно исключить время. Так

получим *уравнение траектории* - эллипс (рис.23). Обязательно получите самостоятельно! По этой эллиптической траектории точка будет вращаться с частотой ω . Рассмотрим частные случаи.

а) $\delta = 0$. Тогда $y = \frac{b}{a}x$. Эллипс вырождается в наклонный отрезок в первом и третьем квадрантах. Точка будет гармонически колебаться вдоль этого отрезка с частотой ω .

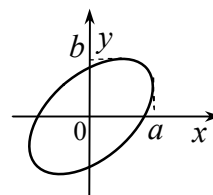


Рис.23

б) $\delta = \pi$. Тогда $y = -\frac{b}{a}x$. Тоже отрезок, только во втором и четвертом квадрантах.

в) $\delta = \pi/2$. Тогда получим $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\Rightarrow$ частица движется по эллипсу, полуоси которого совпадают с осями координат.

2. Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний отличаются в **целое число раз**, то траектория результирующего колебания представляет собой довольно сложную кривую. Эти кривые называются фигурами *Лиссажу*.

Лекция 11. Затухающие колебания. Вынужденные колебания.

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний. В реальной колебательной системе всегда есть силы типа трения, которые приводят к уменьшению амплитуды (и энергии) колебаний. Тогда свободные колебания называются затухающими (рис.24). Пусть на частицу массы m кроме квазиупругой силы $(-kx)$ действует сила сопротивления, пропорциональная скорости $-r\dot{x}$. Тогда уравнение второго закона Ньютона будет иметь вид $m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$.

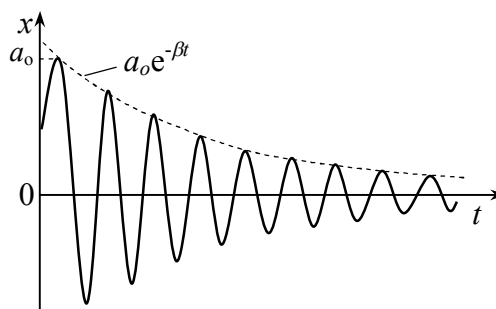


Рис.24

Перенесем все в левую часть, разделим на m и введем обозначения: $2\beta \equiv r/m$; $\omega_0^2 \equiv k/m$; после чего получим

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (83)$$

Это дифференциальное уравнение затухающих колебаний. Его решение

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (84)$$

где a_0 и α - произвольные константы, которые можно найти из **начальных условий**; **Частота затухающих колебаний** $\omega \neq \omega_0$, а зависит от β :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (85)$$

Строго говоря, затухающие колебания не являются гармоническими, но их можно условно называть гармоническими с экспоненциально уменьшающейся амплитудой $a = a_0 e^{-\beta t}$ (пунктир на рис. 24). Решение (84) имеет смысл, если $\omega_0 > \beta$. В противном случае в (85) под корнем стоит отрицательная величина и процесс затухает аperiodически. Физически это означает, что трение слишком велико, чтобы происходили колебания, хотя бы и с уменьшающейся амплитудой.

Логарифмический декремент затухания – это логарифм отношения двух последовательных амплитуд

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T.$$

Подставляя в $\beta = 1/\tau$, получим $\lambda = T/\tau$, $\Rightarrow \lambda$ – величина, обратная такому числу колебаний, за которое амплитуда уменьшится в e раз!

Вынужденные колебания. Вынужденные колебания можно получить, если к перечисленным выше силам (квазиупругой $= -kx$ и трения $= -r\dot{x}$) добавить внешнюю силу, например, периодическую $F = F_0 \cos \omega t$. Тогда по второму закону Ньютона

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t, \Rightarrow$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (86)$$

где $2\beta \equiv r/m$; $\omega_0^2 \equiv k/m$; $f_0 = F_0/m$. Общее решение *неоднородного* дифференциального уравнения (86) состоит из суммы **общего** решения однородного уравнения и **частного** решения неоднородного (86). Общее решение однородного уравнения затухает со временем. Поэтому остается только частное решение (соответствующее **установившимся колебаниям**), которое показывает, что в системе устанавливаются гармонические колебания с частотой ω вынуждающей силы, но отстающие от нее по фазе на некоторое φ

$$x = a \cos(\omega t - \varphi). \quad (87)$$

Величины a и φ нетрудно вычислить:

$$a = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (88)$$

Резонанс. Первая из формул (88) показывает зависимость амплитуды a от частоты вынуждающей силы (рис.25). При $\omega=0$,

$$a = f_0 / \omega_0^2 = F_0 / m \omega_0^2 = F_0 / k,$$

а максимум амплитуды соответствует условию

$\frac{da}{d\omega} = 0$. Но еще проще найти *минимум* только для

выражения под корнем, приравняв нулю

производную от него. Соответствующая частота $\omega_{\text{рез}}$ называется **резонансной**

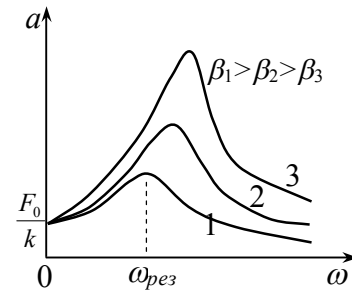


Рис.25

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (89)$$

а само явление достижения максимальной амплитуды называется **резонансом**.

Подставляя в первую из формул (20) резонансную частоту (21), получим максимальную амплитуду

$$a = \frac{f_0}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (90)$$

Из (90) и рис. 25 видно, что чем меньше затухание в системе, тем ярче выражен резонанс. Резонанс используют, если нужно усилить колебания, и, наоборот избегают, если он может привести к нежелательному усилению колебаний.

Лекция 12. Упругие волны

Уравнение волны. Упругой волной называется процесс распространения **возмущения** в упругой среде. При этом сами частицы среды испытывают только колебания около своих положений равновесия. Если колебания частиц происходят вдоль направления распространения, то волна называется **продольной**, а если перпендикулярно – **поперечной**.

Рассмотрим для простоты распространение возмущения вдоль длинного натянутого шнура, который совместим с осью x . В качестве возмущения рассмотрим ξ - смещение элементов шнура из положения равновесия как функцию координаты и времени $\xi=f(x,t)$. Пусть возмущение распространяется в положительном направлении оси x со скоростью $v=\frac{dx}{dt}$. Тогда в точку с координатой x возмущение придет с опозданием на время $\frac{x}{v}$. Итого в момент t в точке x возмущение будет равно $\xi(x,t)=f(t-x/v)$. Если волна распространяется в отрицательном направлении оси x , то в скобках будет плюс. Выражение в рамочке – это уравнение волны в общем виде. В частности, **уравнение плоской гармонической волны** имеет вид

$$\xi(x,t)=a\cos\omega(t-x/v)=a\cos(\omega t-ax/v). \quad (91)$$

a – амплитуда волны, ω - циклическая частота колебаний частиц среды.

Функция (91) периодична с периодом 2π и по времени и по координате! Длиной волны λ называется расстояние, проходимое за один период колебаний

$$\lambda=vT=\frac{v}{\nu}, \quad \Rightarrow \quad (92)$$

Введем волновое число $k=\frac{\omega}{v}=\frac{2\pi}{\lambda}$. Тогда **уравнение плоской гармонической волны** примет симметричный вид

$$\xi(x,t)=a\cos(\omega t-kx). \quad (93)$$

Легко показать, что v - это **фазовая скорость**. Действительно, зафиксируем фазу в (23): пусть $t - x/v = \text{const}$, $\Rightarrow$

$$(t - x/v)'_t = 0 = 1 - \frac{dx}{v dt} \Rightarrow v - \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow v = \frac{dx}{dt},$$

что и требовалось доказать. В плоской волне **волновые поверхности** (т.е. геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе) имеют вид плоскостей, (в нашем случае плоскости перпендикулярны оси x). Если волновые поверхности - сферы, то волна называется сферической. Фронтом волны называется волновая поверхность, отделяющая область волнового процесса от невозмущенной части среды.

Волновое уравнение. Продифференцировав уравнение (93) дважды по времени и дважды по координате, можно получить уравнение, для которого (93) является решением:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (94)$$

Дифференциальное уравнение (94) является одномерным **волновым уравнением**, в котором v - фазовая скорость. Таким образом,

В стандартной записи волнового уравнения коэффициент при второй производной по времени – величина обратная квадрату скорости распространения волны.

Упругая волна в тонком стержне. Это простейший пример распространения волн в упругой среде. При малых продольных деформациях имеет место **закон Гука**:

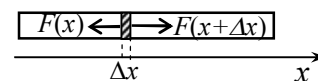


Рис.26

$$\sigma = E \varepsilon, \quad (95)$$

где

σ - напряжение (H/m^2),

$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x}$ - относительная деформация,

E – модуль Юнга ($Па$).

Рассмотрим элемент стержня Δx в момент, когда он оказался в растянутом состоянии. По второму закону Ньютона для этого элемента

$$\rho \Delta x S \cdot \ddot{\xi} = F(x + \Delta x) + F(x), \quad (96)$$

где ρ - плотность,

S – площадь поперечного сечения стержня.

Справа стоит алгебраическая сумма сил, действующих на выделенный элемент.

Так как элемент находится в растянутом состоянии, то $F(x + \Delta x) > 0$, $F(x) < 0$, поэтому

$$F(x + \Delta x) + F(x) = S\sigma(x + \Delta x) - S\sigma(x) = S \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Delta x, \quad (97)$$

где учтено, что сила и напряжение слева от Δx имеют разные знаки (см. рис.26)!

Это связано с тем, что в законе Гука (95) величины σ и ε должны

иметь знаки одинаковые, а у нас – растяжение, $\Rightarrow \varepsilon > 0$, $\Rightarrow \sigma > 0$! Подставим (97) в

(96) и сократим на $S\Delta x$; затем подставим $\sigma = E \frac{\partial \xi}{\partial x}$ из закона Гука и получим

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (98)$$

т.е. волновое уравнение, $\Rightarrow$ коэффициент при $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ позволяет выразить **фазовую**

скорость упругой продольной волны:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}} \quad (99)$$

Лекция 13. Энергия упругой волны. Звуковые волны

Энергия упругой волны. К закрепленной с одного конца струне (стержню) приложим с другой стороны растягивающую силу, которая по закону Гука в пределах упругой деформации должна изменяться пропорционально смещению: $F = \mu x$, где μ - коэффициент упругости. Для нахождения работы этой силы необходимо проинтегрировать выражение $Fdx = \mu x dx$ в пределах от 0 до x . Поэтому работа равна $A = \frac{\mu x^2}{2}$. Эта работа идет на увеличение упругой энергии стержня, $\Rightarrow$ потенциальная энергия растянутого на x стержня (струны) равна

$$U = \frac{\mu x^2}{2}. \quad (100)$$

Потенциальная энергия растянутого (сжатого) стержня- это энергия упругой деформации!

Так как $\sigma = \frac{F}{S} = \frac{\mu x}{S}$; $\varepsilon = \frac{x}{l}$, $\Rightarrow \frac{\mu x}{S} = E \frac{x}{l}$, $\Rightarrow U = \frac{E \varepsilon^2}{2} Sl$.

Поскольку Sl – объем стержня длины l , то плотность потенциальной энергии (энергия единицы объема) равна

$$w_n = \frac{E \varepsilon^2}{2}. \quad (101)$$

При прохождении продольной волны каждая единица его объема обладает еще и кинетической энергией, плотность которой, очевидно, равна половине

произведения плотности на квадрат скорости удлинения, поэтому плотность полной энергии равна сумме

$$w = \frac{\rho \dot{\xi}^2}{2} + \frac{E \varepsilon^2}{2}. \quad (102)$$

Выражая модуль Юнга из (99)→(102), получим

$$w = \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + v^2 \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 \right]. \quad (103)$$

Нетрудно убедиться, что оба слагаемых равны друг другу, $\Rightarrow$

Плотности кинетической и упругой (потенциальной) энергии в этой волне одинаковы и изменяются синхфазно!

В частности, плотность энергии волны можно выразить как $w = \rho \dot{\xi}^2$. Тогда для гармонической волны $\xi(x,t) = a \cos(\omega t - kx)$ плотность энергии равна

$$w = \rho a^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx).$$

Среднее значение плотности энергии за период (или за $t \gg T$) равно

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2, \quad (104)$$

поскольку среднее значение квадрата синуса за период равно $\frac{1}{2}$. Полученное выражение справедливо также и для упругих волн в жидкостях и газах.

Плотность потока энергии. Вектор Умова. Поток энергии Φ называется количество энергии переносимое волной через поверхность S в единицу

времени $\Phi = \frac{dW}{dt}$. Поток энергии в разных точках поверхности S может быть

разным. Чтобы более детально охарактеризовать это обстоятельство вводят понятие ***плотности потока энергии***: это поток энергии через единичную

площадку, перпендикулярную к направлению переноса энергии: $j = \frac{d\Phi}{dS_{\perp}}$. Если

φ – угол между нормалью к dS и направлением переноса энергии

(совпадающим с $\vec{v}$), то $dS_{\perp} = dS \cos \varphi, \Rightarrow$

энергию $dW(=w dV)$, переносимую через dS за время dt можно выразить через скорость и w :

$$dW = w v dt dS \cos \varphi, \Rightarrow \frac{dW}{dS} = w dt v \cdot dS_{\perp}, \Rightarrow$$

$$j = w v .$$

И поскольку направление $\vec{v}$ совпадает с направлением переноса энергии, то аналогично можно записать и **вектор плотности потока энергии (вектор Умова)**:

$$\vec{j} = w \vec{v} . \quad (105)$$

Из выражения (105) видно, что величина вектора плотности потока энергии пропорциональна w , среднее по времени значение которой определяется формулой (104), поэтому и среднее значение вектора $\langle \vec{j} \rangle = \langle w \rangle \vec{v}, \Rightarrow$

$$\langle \vec{j} \rangle = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 \vec{v} . \quad (106)$$

Интенсивность волны – это $I = \langle j \rangle = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega^2 v$, т.е. модуль среднего по времени вектора плотности потока энергии – модуль среднего вектора Умова.

Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды и квадрату частоты волны.

Звуковые волны. Так называется распространяющийся в упругой среде волновой процесс (в диапазоне от 20 Гц до 20 кГц), воспринимаемый человеческим ухом. Упругие волны с частотой меньше 20 Гц называются **инфразвуком**, больше 20 кГц – **ультразвуком**. Звук различают по высоте,

тембру и громкости. **Высота звука** определяется его частотой: чем больше ν , тем выше звук. **Тембр звука** определяется всем набором частот этого звука, который называется его *акустическим спектром*. Этот спектр может состоять из непрерывного или дискретного набора частот. Именно тембром определяются отличия в звучании музыкальных инструментов.

Громкость звука – это мера слухового ощущения, качественно характеризуемая терминами от тихого до громкого. При неизменной частоте громкость звука растет с увеличением его интенсивности I (Вт/м^2).

Минимальная величина $I \approx 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$ (*порог слышимости*). При интенсивности звука $I \approx 10 \text{ Вт/м}^2$ (*порог болевого ощущения*) восприятие звука сменяется ощущением давления и боли. Оба порога зависят от частоты колебаний.

Субъективное восприятие громкости возрастает значительно медленнее роста интенсивности звука, поэтому используют логарифмическую шкалу, в которой громкость звука оценивают величиной L :

$$L_B = \lg \frac{I}{I_0},$$

где L_B – *уровень интенсивности звука в беллах (Б)*, $I_0 \approx 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$ – порог слышимости при частоте 1 кГц. Таким образом, уровень порога слышимости $L_B = 0$. Обычно пользуются не беллами, а в 10 раз меньшей единицей – *децибелом*:

$$L_{\text{дБ}} = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \quad (107)$$

В этих же единицах можно измерять уменьшение (затухание) интенсивности звука на расстоянии. Например, затухание в 20 дБ соответствует уменьшению интенсивности в 100 раз. Действительно:

$$L_{\text{дБ}} = 20 = 10 \lg \frac{I_1}{I_2}, \Rightarrow \lg \frac{I_1}{I_2} = 2, \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = 10^2 = 100, \Rightarrow I_1 = 100 I_2,$$

где I_1 - интенсивность в точке, расположенной ближе к источнику.

Лекции 14-15. Элементы специальной(СТО) и общей теории относительности (ОТО)

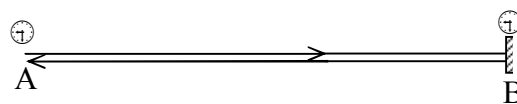
Принцип относительности. Все явления в замкнутой физической системе протекают одинаково независимо от того, покоится она в некоторой **инерциальной** системе отсчета (СО) или движется как целое с постоянной скоростью.

Событие. Пусть СО, которую обозначим К, покоится, а К' движется вдоль ox вправо со скоростью v . Положение материальной точки в К определяется тремя координатами x, y, z и временем t , а в К' - соответственно x', y', z' и t' . Время измеряется по одинаковым и синхронизованным часам, покоящимся относительно своей СО. Совокупность четырех координат (x, y, z, t) или (x', y', z', t') будем называть событием. Таким образом, событие определяется местом, где оно произошло и временем, когда оно произошло.

Постулаты СТО.

1. Принцип относительности. (Все инерциальные СО эквивалентны).
2. Существует предельная скорость распространения взаимодействий (или скорость света c в вакууме одинакова во всех инерциальных СО)

Одновременность событий и синхронизация часов. Очевидно, что для измерения промежутка времени между событиями, происходящими в одном и том же месте достаточно в этом же месте иметь часы. Если этот промежуток $= 0$, $\Rightarrow$ события одновременны. А как быть с событиями, происходящими в разных местах? Для измерения промежутка времени между ними, нужно иметь идентичные синхронно идущие часы в тех местах, где эти события происходят. Синхронизация принципиально может быть осуществлена при помощи светового сигнала следующим образом.



Пусть из точки А(рис.27) в момент t_1 по

Рис.27

часам А отправляется сигнал в направлении точки В, и, отразившись, возвращается в точку А в момент t_2 по часам А. Пусть t' - это момент его отражения в точке В по часам В. Тогда **по определению**, часы А и В идут **синхронно**, если

$$t' = \frac{t_1 + t_2}{2}.$$

Казалось бы, а как может быть иначе, если, к примеру, одинаково правильно идущие часы установили по сигналу точного времени, а затем разнесли в точки А и В? Притом, что $t_1 = t_2$, так как скорость света туда и обратно (да и куда угодно – по второму постулату) равна c . Ан нет! Где гарантии того, что пока мы их разносили, что-то не произошло с их показаниями? Следовательно, в СТО все и даже очевидное необходимо точно переопределить. Итого, в **одной СО** даже и в разных местах мы можем считать события одновременными, если эти события произошло в одно и то же время по показаниям синхронизованных часов. А в разных? В этом случае имеет место...

Относительность одновременности и относительность

промежутков времени. Покажем, что в движущейся СО время замедляется.

Пусть в некоторой системе отсчета K' два события происходят в одной и той

же точке, тогда промежуток времени между ними, Δt_0 , называется

собственным временем между этими событиями. Перечитайте эту фразу пять

раз! Обратите внимание! K' - движется, а время – собственное! По каким часам

оно измерено? Правильно, по часам системы K' . Каким будет промежуток

времени между этими же событиями в системе отсчета K , относительно

которой K' движется со скоростью v ? Для ответа на этот вопрос рассмотрим

мысленный эксперимент со «световыми часами», устроенными так. На концах

жесткого стержня длиной l закреплены два параллельных зеркала. Между

зеркалами движется короткий световой импульс, периодически отражаясь то от верхнего, то от нижнего зеркала(рис.28). Пусть этот стержень неподвижен в

системе K' и расположен перпендикулярно скорости v (или оси x' , что одно и то же). Рассмотрим один период таких часов: от момента испускания импульса из нижнего зеркала до его возвращения в точку испускания после отражения от верхнего зеркала. В системе отсчета K' стержень покоится и события: испускание и возвращение, - происходят в одной точке, следовательно промежуток времени между ними – это собственное время (что мы читали пять раз?), это время $\Delta t_0 = \frac{2l}{c}$.

С точки зрения системы K стержень движется. Поэтому пока сигнал идет

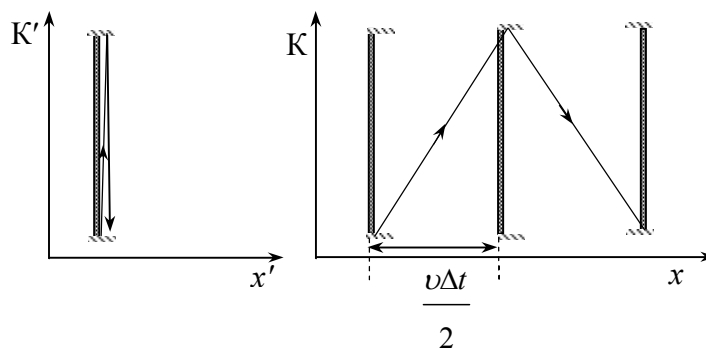


Рис.28

между зеркалами (от нижнего до верхнего) система K' успевает «отъехать» на расстояние, равное $\frac{v\Delta t}{2}$. (Почему $\frac{1}{2}$? Потому, что Δt – это время прохождения света от нижнего до верхнего зеркал и обратно). Поэтому с точки зрения наблюдателя находящегося в системе K , световой импульс движется между зеркалами зигзагообразно, т.е. проходит больший путь (равный, по теореме Пифагора, $2\sqrt{l^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2} = c\Delta t$). А так как при одинаковой скорости света во всех СОна это потребует больше времени, то $\Delta t > \Delta t_0$. Выразая Δt , получим

$$\Delta t = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (108)$$

Это значит, что собственное время – самое короткое, или, что движущиеся часы идут медленнее с «точки зрения» покоящихся часов. До сих пор мы автоматически предполагали, что мы находимся в системе K , т.е. покоимся. А как с точки зрения наблюдателя, находящегося в СО K' ? Ответ очевиден и этого требует принцип относительности. С точки зрения наблюдателя, находящегося в СО K' медленнее идут часы, связанные с системой K .

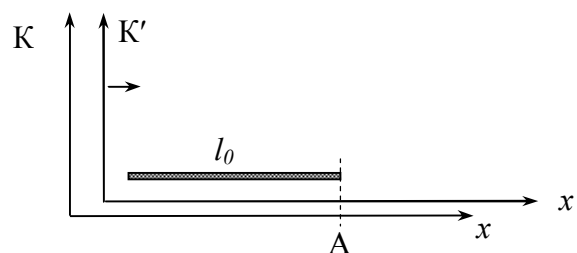


Рис.29

Сокращение линейных размеров в направлении движения. Покажем, что длина твердого стержня, расположенного вдоль направления относительной скорости систем отсчета K и K' будет различной в этих системах. Пусть стержень покоится в СО K' . Его длину l_0 , измеренную в системе K' , где он покоится, называют *собственной длиной*. Длину в СО K , относительно которой стержень движется со скоростью v , обозначим просто l . Чтобы найти связь между l и l_0 , рассмотрим два события: 1- прохождение начала стержня мимо точки A на оси x системы K (рис.29) и 2 – прохождение конца стержня мимо этой же точки (рис.30). В системе K эти события происходят в одной точке, следовательно, промежуток времени между ними – собственное время (что мы читали пять раз?!), т.е. Δt_0 , а длина стержня $l = v\Delta t_0$. С точки зрения наблюдателя в K' точка A движется мимо него в противоположную сторону со скоростью v . И все это происходит в течение времени Δt , естественно по часам системы K' . Поэтому он делает заключение, что $l_0 = v\Delta t$. Выразим v из двух

последних равенств и приравняем правые части. Тогда мы можем выразить l через l_0 :

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (109)$$

Поскольку выражение под корнем меньше 1, следовательно, $l < l_0$. Значит,

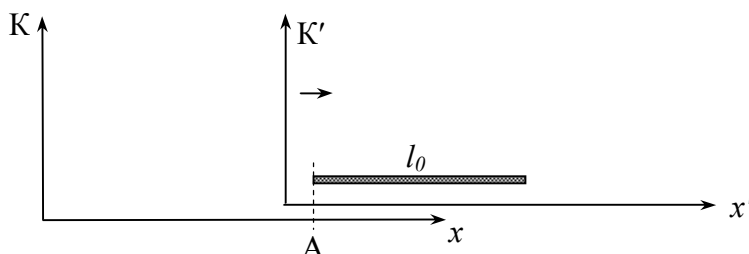


Рис.30

длина стержня максимальна в той СО, относительно которой стержень покоится. Этот релятивистский эффект носит название *лоренцева* сокращения линейных размеров (или просто длины). Кстати, Вы уже поняли, что слово «релятивистский» означает такой, для которого приходится учитывать относительность интервалов времени и пространственных расстояний? Произнесите это слово вслух несколько раз, а то не все могут с первой попытки. В полном соответствии с принципом относительности эффект сокращения длины стержня является взаимным: если такой же стержень покоится в СО К, то его длина в этой СО будет равна l_0 , а в СО К' длина будет меньше в соответствии с формулой (109). По-моему, теперь пора перечитать всё с самого начала, а то дальше будет ничего не понять.

Интересно, что при стремлении скорости v к скорости света (см. формулу (2)) длина стремится к нулю! А при малых по сравнению с c скоростях, наоборот все в порядке и время и размеры практически одинаковы во всех СО. Поэтому релятивистские эффекты были долго не заметны.

Преобразования Лоренца. Полученные на основании постулатов СТО выражения (108) и (109) позволяют путем незатейливых действий (чистая алгебра) получить в отвлеченном (от стержня) виде преобразования координат и времени при переходе от покоящейся к движущейся СО или наоборот. Попробуйте выполнить преобразования самостоятельно. Должно получиться следующее (если K' движется относительно K в положительном направлении осей x и x')

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Это и есть преобразования Лоренца, которые переходят в преобразования Галилея при $v \ll c$. Самое замечательное в преобразованиях Лоренца – это то, что в них перемешаны пространственные и временные координаты. Это указывает на тесную связь между временем и пространством. Собственно поэтому СТО для более подготовленной аудитории излагают, используя четырехмерное пространство, где четвертой координатой выступает время (точнее, ct – это чтобы размерность по всем четырем осям совпадала).

Интервал между событиями. Наиболее характерной чертой СТО является установление абсолютных, не зависящих от выбора систем отсчета законов природы. В частности, это – отыскание инвариантных величин, т.е. величин одинаковых во всех СО. Одну такую величину мы уже знаем: это скорость света в вакууме. Другой такой величиной является *пространственно-временной интервал* между событиями, который определяется так

$$S_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2},$$

$$\text{где } l_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

Если воспользоваться преобразованиями Лоренца, то легко убедиться, что величина S_{12} одинакова во всех СО. Подставьте для упражнения. Учтите, что в

нашем случае движения вдоль ox остальные пространственные координаты не меняются при переходе от одной СО к другой (т.е. $l_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2$).

Интервал S_{12} является обобщением понятия временного интервала. В зависимости от того, какая составляющая интервала больше – временная (ct) или пространственная (l_{12}) возникает разделение интервалов на *времениподобные* и *пространственноподобные*.

Для *времениподобного* интервала $c^2 t_{12}^2 > l_{12}^2$, следовательно $S_{12}^2 > 0$. В этом случае всегда можно найти такую СО K' , в которой рассматриваемые события происходят в одной точке, т.е. $l'_{12} = 0$ и промежуток времени между ними является *собственным* временем между ними (что мы читали пять раз?). В этой СО интервал равен скорости света, умноженной на собственное время, т.е. пропорционален собственному времени между событиями. Для таких событий понятия "раньше", "позже" имеют абсолютный смысл. Очевидно, между такими событиями может существовать причинно-следственная связь. (Не обязательно, позже – не значит – вследствие).

Для *пространственноподобного* интервала $c^2 t_{12}^2 < l_{12}^2$, следовательно $S_{12}^2 < 0$, - интервал является мнимым. В этом случае всегда можно найти такую СО K' , в которой рассматриваемые события происходят одновременно, т.е. $t'_{12} = 0$. Тогда в этой СО $|S_{12}| = l_{12}$. Понятие раньше-позже-одновременно для таких событий относительно: всегда можно указать такие СО, в которых первое событие происходит раньше второго, а можно и такие СО, в которых второе событие происходит раньше первого. Очевидно. Что для таких событий причинно-следственная связь исключена.

Равный нулю интервал между событиями, связанными, очевидно, световым сигналом, называется *светоподобным*.

Закон преобразования скорости. Этот закон немедленно следует из правил дифференцирования и преобразований Лоренца:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x};$$

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x};$$

$$u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v}{c^2} u'_x}.$$

Отметим, что компоненты скорости u_y и u_z , перпендикулярные к направлению относительной скорости СО, в отличие от координат y и z не остаются неизменными. Это связано с тем, что при переходе от одной СО к другой время также преобразуется. В предельном случае $v \ll c$ релятивистские формулы переходят в классический закон сложения скоростей, обоснованный преобразованиями Галилея.

Тот раздел, который в классической механике принято называть динамикой, в теории относительности чаще называют общей теорией относительности, являющейся по сути релятивистской динамикой.

Импульс и энергия. Релятивистские выражения для этих величин отличаются от соответствующих выражений в механике:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (110)$$

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (111)$$

где величина m_0 – *масса покоя* частицы – это масса в той СО, где частица покоится. Иногда величину $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ называют релятивистской массой частицы. С ее помощью выражения для энергии и импульса частицы можно записать в компактном виде

$$p = mv, \quad E = mc^2 \quad (112)$$

Отсюда видно, что если релятивистской частице (т.е. частице, движущейся со скоростью, сравнимой со скоростью света) сообщить дополнительную энергию, чтобы увеличить её импульс, то её скорость при этом увеличится незначительно. Можно сказать, что теперь ее энергия и импульс увеличиваются за счет роста её релятивистской массы. Этот эффект наблюдается в работе ускорителей заряженных частиц высоких энергий и служит наиболее убедительным экспериментальным подтверждением теории относительности.

Энергия покоя. Из (112) следует, что покоящееся тело обладает энергией:

$$E_0 = m_0 c^2.$$

Эту энергию называют энергией покоя. Можно показать, что кинетическая энергия движущегося тела, равная разности $E - E_0$, при переходе к обычным (малым) скоростям обращается в известное выражение $E = mv^2/2$.

Эквивалентность энергии и массы. Закон пропорциональности энергии и массы $E = mc^2$, является одним из самых замечательных выводов ТО. В классической механике масса есть физическая величина, являющаяся количественной характеристикой его инертных свойств, т.е. мерой инертности. С другой стороны, масса характеризует способность тела создавать поле тяготения и испытывать силу притяжения в поле тяготения. Это - тяготеющая или гравитационная масса. Инертность и способность к гравитационным

взаимодействиям представляют собой *совершенно различные* проявления свойств материи. Однако то, что меры этих различных свойств называются одинаковым словом – *масса*, не случайно, так как оба свойства всегда существуют вместе и всегда друг другу пропорциональны. Это подтверждено с огромной точностью экспериментально. Поэтому в СИ коэффициент пропорциональности между ними намеренно выбран равным 1. Как же следует отвечать на вопрос: есть ли масса инертная и гравитационная одно и то же или нет? По своим проявлениям они различны, но их числовые характеристики друг другу пропорциональны. Такое положение вещей характеризуется словом «эквивалентность». Аналогичный вопрос возникает и по поводу массы покоя и энергии покоя в ТО. Проявление свойств материи, соответствующих массе и энергии, бесспорно различны. Но эти свойства неразрывно связаны и пропорциональны друг другу. Именно в этом смысле можно говорить об эквивалентности массы покоя и энергии покоя. Формула $E=mc^2$ означает, что всякое изменение энергии системы сопровождается эквивалентным изменением ее массы.

О законе сохранения массы. В большинстве физических процессов масса остается неизменной. В классической механике это казалось настолько очевидным, что закон сохранения массы не рассматривался. Как же это согласовать с законом пропорциональности массы и энергии? Дело в том, что обычно подавляющая часть внутренней энергии (и соответствующая ей масса покоя) в превращениях не участвует. Поэтому определяемая взвешиванием масса практически сохраняется, несмотря на то, что тело выделяет или поглощает энергию. Это объясняется недостаточной точностью взвешивания.

Пример. При неупругом столкновении двух частиц по 1 г, разогнанных навстречу друг другу до скорости 1 км/с, добавочная масса слипшейся пары составляет Δm , которую можно вычислить из формулы $E = \Delta mc^2$. Таким

образом, $\Delta mc^2 \approx 2 \frac{mv^2}{2} \approx 10^{-11} \text{ Дж}$ (частицы после столкновения остановились), что

намного меньше погрешности, с которой может быть измерена масса 1 г.

Один полезный инвариант релятивистской динамики. Если уравнения (110, 111) рассмотреть как систему и исключить U , то путем очень несложных алгебраических операций можно получить

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4.$$

Выражение справа не зависит от CO , так как оба сомножителя константы. Следовательно, выражение слева является еще одним инвариантом TO , связывающим энергию и импульс.

Вместо заключения. Раздел, который мы назвали *релятивистской динамикой*, является частью теории относительности, которую принято называть *общей теорией относительности* (ОТО). ОТО – сложный и противоречивый организм, который пересматривается практически с момента ее создания. Иногда в учебниках приводятся примеры, как подтверждающие ОТО, так и вступающие с нею в противоречие. Это очень интересная тема, но ее обсуждение требует значительно более подробного и углубленного изложения, которое выходит за рамки нашей программы.

Молекулярная физика

Лекция 1. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа

Молекулярная физика – это часть курса общей физики, в которой изучают свойства систем, исходя из молекулярно-кинетической теории. Согласно этой теории все тела состоят из огромного количества молекул (или атомов), находящихся в непрерывном хаотическом тепловом движении. Поведение систем, состоящих из очень большого количества частиц (макросистем), описываются с помощью вероятностных методов, позволяющих перейти к параметрам, характеризующим макроскопические свойства, исходя из коллективного поведения составляющих системы частиц и на основе молекулярно-кинетической теории. Термодинамический подход, когда система описывается параметрами состояния (объем, давление, температура и т.д.) и статистический подход, говорящий на языке функций распределения и средних значений величин, взаимно дополняют друг друга. Молекулярно-кинетическая теория достигла особенно больших успехов применительно к газам.

Давление газа на стенки сосуда. Основное уравнение кинетической теории газов. Будем считать молекулы газа одинаковыми упругими шариками, которые большую часть времени не взаимодействуют друг с другом. Кратковременные взаимодействия сводятся к столкновениям, происходящим по законам упругого удара. Эта модель называется **идеальным газом**. На первом этапе будем считать, что молекулы пробегают от одной стенки сосуда до другой прямолинейно, перпендикулярно стенке и без столкновений между собой. Определим давление как

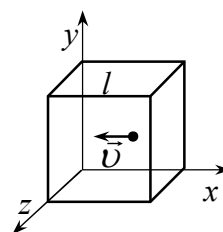


Рис. 1

модуль средней силы, действующей нормально к поверхности, отнесенный к площади этой поверхности:

$$p = \frac{\langle F \rangle}{S}.$$

Пусть газ находится в сосуде кубической формы с ребром l (рис.1). Молекула массы m , движущаяся со скоростью $\vec{v}$ к левой стенке, при упругом соударении со стенкой получит приращение проекции импульса $mv_x - (-mv_x) = 2mv_x$, затем отразится от правой стенки и полетит обратно. Время τ между двумя последовательными соударениями с левой стенкой

$\tau = \frac{2l}{v_x}$. За время Δt число соударений о левую стенку равно

$$\frac{\Delta t}{\tau} = \frac{\Delta t v_x}{2l},$$

а приращение импульса равно

$$2mv_x \frac{\Delta t v_x}{2l} = \frac{mv_x^2}{l} \Delta t.$$

Пусть n_1 молекул в единице объема движутся со скоростью $\vec{v}_1$, n_2 молекул движутся со скоростью $\vec{v}_2$, и т.д. Очевидно, что из n_1 молекул одна треть, т.е. $\frac{n_1}{3}$ молекул, движутся вдоль оси x , и по столько же вдоль осей y и z . Всего молекул, движущихся в одном из трех направлений, будет $\frac{n_1 V}{3} = \frac{n_1 l^3}{3}$, где $V = l^3$ - объем сосуда. За время Δt вследствие столкновений с левой стенкой эти молекулы получат суммарное приращение проекции импульса, равное

$$\frac{mv_{1x}^2}{l} \Delta t \cdot \frac{n_1 l^3}{3} = \frac{mv_{1x}^2 n_1 l^2}{3} \Delta t.$$

По второму закону Ньютона $\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \langle F \rangle$, $\Rightarrow$ давление на левую стенку со стороны этих $\frac{n_1}{3}$ молекул равно

$$p_1 = \frac{\langle F \rangle}{S} = \frac{\langle F \rangle}{l^2} = \frac{m v_1^2 n_1}{3}, \Rightarrow$$

$$p_1 = \frac{m v_1^2 n_1}{3}.$$

Аналогично $\frac{n_2}{3}$ молекул (со скоростями $\bar{v}_2$) создадут давление $p_2 = \frac{m v_2^2 n_2}{3}$ и

т.д. Давление, производимое всеми молекулами на левую стенку равно:

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \frac{m v_1^2 n_1}{3} + \frac{m v_2^2 n_2}{3} + \dots + \frac{m v_n^2 n_n}{3} = \frac{m}{3} \sum v_i^2 n_i.$$

Последняя сумма представляет собой сумму квадратов всех скоростей в единице объема. Разделив её на концентрацию n ($n = n_1 + n_2 + \dots$), мы получим средний квадрат скорости:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\sum v_i^2 n_i}{n}.$$

Поэтому давление $p = \frac{mn}{3} \langle v^2 \rangle$. Перепишем это уравнение

$$p = \frac{2n}{3} \frac{\langle m v^2 \rangle}{2}, \Rightarrow$$

$$\boxed{p = \frac{2n}{3} \left\langle \frac{m v^2}{2} \right\rangle}. \quad (1)$$

Это и есть **основное уравнение кинетической теории газов**: давление газа равно двум третям средней кинетической энергии поступательного движения молекул в единице объема газа.

Лекция 2. Уравнение состояния идеального газа.

Средняя кинетическая энергия и число степеней свободы

Уравнение состояния идеального газа. Состояние идеального газа характеризуется давлением p , объемом V и температурой T . На данном этапе ограничимся пониманием температуры, как меры того свойства тел, которое мы характеризуем словами горячий, или холодный, и измеряем с помощью термометра в кельвинах (K). Уравнение, связывающее эти три параметра, называется уравнением состояния идеального газа. Известно, что при небольших давлениях многие газы следуют уравнению Клапейрона:

$$\frac{pV}{T} = const.$$

Выразим V через молярный объем и число молей ν : $V = V_\mu \nu$, тогда уравнение состояния примет вид: $\frac{pV_\mu \nu}{T} = const$, откуда $\frac{pV_\mu}{T} = \frac{const}{\nu} \equiv R$, где R не зависит от количества газа. Согласно **закону Авогадро**, объемы одного моля любых газов при одинаковых давлении и температуре также одинаковы, $\Rightarrow$ величина R одинакова для всех газов. Ее принято называть **универсальной газовой постоянной**: $R = 8,31 \text{ Дж/моль} \cdot K$. Число молей $\nu = m/M$, поэтому уравнению состояния можно придать вид

$$\boxed{pV = \frac{m}{M} RT}. \quad (2)$$

В этой форме уравнение состояния называют **уравнением Клапейрона-Менделеева**.

Средняя кинетическая энергия молекулы. Уравнению состояния можно придать иную форму, если ввести постоянную Больцмана:

$$k = \frac{R}{N_A},$$

где $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ – число молекул, составляющих один моль вещества (число Авогадро), $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$.

Подставляя в уравнение Клапейрона-Менделеева $R = kN_A$, а затем

$$\frac{m}{M} \frac{N_A}{V} = \frac{\nu N_A}{V} = \frac{N}{V} \equiv n, \text{ т.е. концентрацию молекул, получим}$$

$$\boxed{p = nkT}. \quad (3)$$

Давление газа при данной температуре определяется только его концентрацией.

Подставим (3) в (1), $\Rightarrow nkT = \frac{2n}{3} \left\langle \frac{m\nu^2}{2} \right\rangle$, откуда средняя кинетическая энергия

поступательного движения

$$\left\langle \frac{m\nu^2}{2} \right\rangle = \frac{3}{2} kT \quad (4)$$

Таким образом, мы можем уточнить понятие температуры:

температура пропорциональна средней кинетической энергии поступательного движения молекулы.

Степени свободы. Числом степеней свободы i тела (молекулы) называется число независимых координат, с помощью которых может быть задано

положение молекулы в пространстве. Казалось бы, нет ничего проще: по три пространственные координаты (x, y, z) на каждый атом, $\Rightarrow$ число i в три раза больше числа атомов в молекуле. Однако это не правильно, так как атомы в молекуле связаны между собой жесткими или упругими связями, и от этого зависит, сколько именно из $3N$ координат будут независимыми, ибо только независимые координаты входят в число степеней свободы. Каждая молекула имеет три поступательных степени свободы, в качестве которых можно взять три декартовы координаты (x, y, z) центра масс. Если молекула двухатомная и жесткая, то кроме трех поступательных степеней свободы она имеет вращательные степени свободы, соответствующие углам

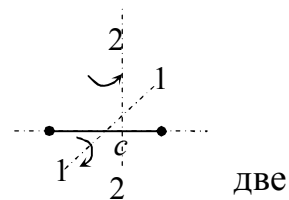


Рис.2

поворота вокруг двух взаимно перпендикулярных осей 1-1 и 2-2, проходящих через центр масс (рис.2). Вращение вокруг оси молекулы для материальных точек не имеет смысла. Поэтому жесткая двухатомная молекула имеет 5 степеней свободы. Если молекула упругая, то появляется еще одна степень свободы (расстояние между атомами), она называется колебательной.

Нелинейная трехатомная жесткая

молекула имеет 3 поступательные и 3 вращательные степени свободы (всего 6), а если она упругая, то еще и 3 колебательные степени свободы (всего 9). В общем случае жесткая молекула из N атомов имеет 3 поступательные и 3 вращательные степени свободы (всего 6), а если она упругая, то еще и $3N-6$ колебательных степеней свободы (всего $3N$).

Гипотеза о равномерном распределении. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы равна $\frac{3}{2}kT$ (4), следовательно, на каждую из трех поступательных степеней свободы молекулы приходится средняя кинетическая энергия $\frac{kT}{2}$. Больцман обобщил этот вывод, выдвинув гипотезу о равном распределении энергии по степеням свободы. При этом на

каждую колебательную степень свободы должны приходиться в среднем по две половинки kT - одна в виде кинетической и одна в виде потенциальной (их средние значения одинаковы). Таким образом, средняя энергия молекулы равна

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad (5)$$

где

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}},$$

т.е. сумме числа поступательных, вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы. Очевидно, i совпадает с числом степеней свободы только для жестких молекул.

Лекция 3. Первое начало термодинамики

Первое начало термодинамики выражает закон сохранения энергии в терминах взаимных превращений разных видов энергии. Для его формулировки необходимо определить три величины: внутреннюю энергию U , работу A и теплоту Q .

Внутренняя энергия. Внутренней энергией U макросистемы называют величину, включающую

- 1] суммарную кинетическую энергию хаотического движения всех молекул;
- 2] потенциальную энергию взаимодействия всех молекул макросистемы;
- 3] внутреннюю энергию самих молекул, атомов, ядер и т.д....

В модели идеального газа виды энергии, перечисленные в пунктах 2 и 3, не включаются во внутреннюю энергию по условиям самой модели.

Внутренняя энергия является функцией состояния, т.е. величина ее изменения не зависит от того, каким путем макросистема перешла из одного

состояния в другое. Внутренняя энергия аддитивна, т.е. внутренняя энергия системы равна сумме внутренних энергий составляющих систему частей.

Работа и количество теплоты. Внутреннюю энергию можно изменить двумя способами: или при совершении системой работы A над внешними телами, или путем теплопередачи. В первом случае система совершает механическую работу над внешними телами, во втором происходит непосредственный обмен энергией при столкновениях молекул системы с молекулами внешней среды, который не сопровождается перемещением внешних тел. Близким по результату является и передача тепла путем излучения.

Первое начало термодинамики утверждает, что полученное макросистемой количество теплоты Q идет на приращение внутренней энергии ΔU и совершение системой работы над внешними телами:

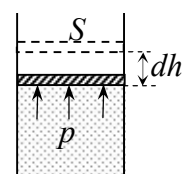
$$Q = \Delta U + A. \quad (6)$$

Первое начало термодинамики в дифференциальной форме следует писать в виде

$$\delta Q = dU + \delta A, \quad (7)$$

потому, что малые приращения δQ и δA не являются полными дифференциалами, так как зависят от вида процесса, связывающего последовательные состояния системы. На практике, где вид процесса известен, это не создает особых проблем, так как при известном процессе указанные приращения в математическом отношении ничем не будут отличаться от полных дифференциалов.

Работа, совершаемая термодинамической системой. Пусть газ находится в цилиндре под поршнем сечения S под давлением p (рис.3). Если объем газа увеличивается на



$dV = Sdh$ под действием нормальной силы $F = pS$, значит, что газ совершил работу

$$dA = Fdh = pSdh = pdV.$$

Дифференциально малая работа газа равна произведению давления и приращения объема:

$$dA = pdV. \quad (8)$$

Исключительно полезно помнить, что если объем не меняется, $\Rightarrow$ газ работу не совершает. Чтобы вычислить работу газа в конкретном процессе, необходимо знать вид зависимости $p(V)$, чтобы проинтегрировать:

$$A = \int_1^2 pdV. \quad (9)$$

Работа зависит от процесса (т.е. вида функции $p(V)$), что видно из графика на

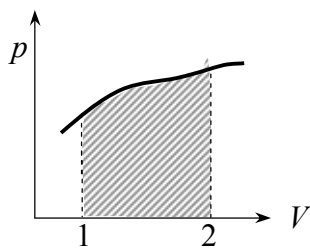


Рис.4

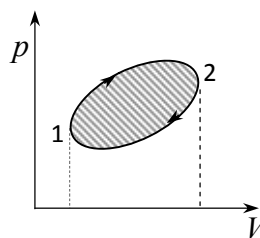


Рис.5

ри
с.4
,
по
ск
ол
ьк
у
фи

зический смысл интеграла в формуле (9) есть площадь под кривой $p(V)$ в указанных пределах. Если кривая $p(V)$ – замкнутая (рис.5), то это значит, что система возвратилась в исходное состояние. Тогда принято говорить, что система совершила круговой цикл. Поскольку работа на участке 1-2 равна площади под верхней частью кривой, а на участке 2-1 работа равна площади

под нижней частью кривой (причем эта работа отрицательна, т.к. изменен порядок пределов интегрирования), то алгебраическая сумма этих работ, т.е. работа за цикл равна только заштрихованной площади. Следовательно, работа при любом круговом процессе равна площади замкнутой кривой в координатах $p-V$. Запишем I начало термодинамики с учетом (8) в виде

$$\boxed{\delta Q = dU + pdV}. \quad (10)$$

Теплоемкость идеального газа. Теплоемкостью тела называется количество теплоты, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на 1 *кельвин* (K):

$$C_T = \frac{dQ}{dT}. \quad (11)$$

Теплоемкость тела C_T является функцией процесса и зависит от количества вещества (массы тела). Поэтому используют молярную теплоемкость C

(количество теплоты, необходимое для нагревания 1 *моля* вещества на 1 K) или удельную теплоемкость c (количество теплоты, необходимое для нагревания 1 $кг$ вещества на 1 K). Очевидно, для нахождения C необходимо C_T разделить на число молей вещества, а для нахождения c необходимо C_T разделить на массу тела. Отсюда размерности: $[C] = Дж/мольK$, $[c] = Дж/кгK$, и связь между удельной и молярной теплоемкостями:

$$C = Mc.$$

Молярной теплоемкостью при постоянном объеме называется частная производная:

$$C_V = \left(\frac{\partial U_\mu}{\partial T} \right)_V. \quad (12)$$

Учитывая, что $U \sim T$, из (12) следует, что $U_\mu = C_V T, \Rightarrow dU_\mu = C_V dT$. Молярной теплоемкостью при постоянном давлении (изобарный процесс) называется частная производная:

$$C_p = \left(\frac{\partial Q_\mu}{\partial T} \right)_p. \quad (13)$$

Разделим I-е начало термодинамики для 1 моля вещества ($\delta Q_\mu = dU_\mu + p dV_\mu$) на dT :

$$\frac{\delta Q_\mu}{dT} = \frac{dU_\mu}{dT} + \frac{p dV_\mu}{dT}, \quad \Rightarrow$$

$$C = C_V + \frac{p dV_\mu}{dT}. \quad (14)$$

В изобарном процессе ($p = \text{const}$) слева стоит C_p . Из уравнения состояния для 1 моля вещества ($pV_\mu = RT$) найдем $p \frac{dV_\mu}{dT} = R$ и подставим в (14) вместо последнего слагаемого:

$$C_p = C_V + R. \quad (15)$$

Отсюда виден смысл постоянной R : это работа расширения 1 моля газа в изобарном процессе при изменении температуры на 1 K.

Постоянная адиабаты – это

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V}.$$

Молярные теплоемкости C_p и C_V можно выразить через γ

$$C_V = \frac{R}{\gamma - 1};$$

$$C_p = \frac{R\gamma}{\gamma - 1}.$$

Можно также получить удобное выражение для внутренней энергии:

$$U = \nu U_\mu,$$

где $\nu = \frac{m}{M}$ - число молей;

$$U_\mu = C_V T,$$

$$\Rightarrow U = \nu \frac{RT}{\gamma - 1} = \left(\frac{m}{M} RT \right) \frac{1}{\gamma - 1}.$$

Выражение в скобках – это правая часть уравнения Клапейрона-Менделеева (2), $\Rightarrow$

$$U = \frac{pV}{\gamma - 1}. \quad (16)$$

Лекция 4. Изопроцессы. Работа и теплоемкость в политропических процессах. Уравнение Ван-дер-Ваальса

Адиабатический процесс – это процесс, происходящий без теплообмена с окружающей средой. Поэтому первое начало термодинамики (7) для него будет выглядеть так: $0 = dU + pdV$. Подставим U из (16):

$$d\left(\frac{pV}{\gamma - 1}\right) + pdV = 0, \text{ или } d(pV) + (\gamma - 1)pdV = 0, \Rightarrow$$

$$Vdp + pdV + \gamma pdV - pdV = 0, \Rightarrow$$

$$Vdp + \gamma pdV = 0.$$

Разделим последнее выражение на pdV , $\Rightarrow \frac{Vdp}{pdV} + \gamma = 0$, и преобразуем, $\Rightarrow$

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0.$$

Левая часть – это сумма дифференциалов логарифмов, $\Rightarrow$

$$d \ln p + \gamma d \ln V = 0, \Rightarrow d \ln(pV^\gamma) = 0, \Rightarrow$$

$$pV^\gamma = \text{const}. \quad (17)$$

Это и есть **уравнение адиабаты**, называемое еще уравнением Пуассона.

Пользуясь уравнением состояния, уравнение адиабаты можно представить в другом виде:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}.$$

В адиабатическом процессе молярная теплоемкость равна нулю, т.к. нет теплообмена. Из урав-

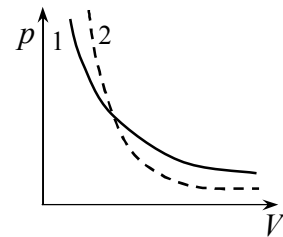


Рис.6

нения $\gamma = \frac{C_v + R}{C_v}$ видно, что $\gamma > 1$, поэтому адиабата (кривая 2 на рис.6) идет круче изотермы ($pV = \text{const}$, кривая 1).

Полиτροπические процессы. Так называются процессы, уравнение которых имеет вид:

$$pV^n = \text{const}, \quad (18)$$

где n - любое число. Из этого определения следует, что адиабатический процесс является политропическим с показателем политропы $n = \gamma$.

Политропическими являются также изохорический ($V = \text{const}$), изобарический ($p = \text{const}$) и изотермический ($T = \text{const}$) процессы. Покажем, что в любом политропическом процессе молярная теплоемкость постоянна: $C_n = \text{const}$.

Запишем по аналогии с адиабатическим процессом уравнение *политропы* (18) в форме

$$TV^{n-1} = \text{const}$$

и вычислим от него полный дифференциал:

$$dT \cdot V^{n-1} + T(n-1)V^{n-2}dV = 0, \Rightarrow$$

$$dT = -T(n-1)V^{-1}dV, \Rightarrow$$

$$\frac{dV}{dT} = -\frac{1}{n-1} \frac{V}{T} = -\frac{R}{p(n-1)} \rightarrow (14), \Rightarrow$$

$$C_n = C_V - \frac{R}{n-1} = \frac{R}{\gamma-1} - \frac{R}{n-1} = \text{const}. \Rightarrow$$

$$C_n = \frac{R}{\gamma-1} - \frac{R}{n-1}. \quad (19)$$

Подстановка в эту формулу значения $n=1$, $\gamma=1$ (для изотермического процесса) дает $C_n \rightarrow \infty$;

для адиабатического процесса $n = \gamma$, откуда $C_n = 0$; для процессов:

изохорического $C_n = C_V$; для изобарического $C_n = C_p$. Из (19) после

подстановки C_V и C_p можно выразить **показатель политропы** через теплоемкости:

$$n = \frac{C_n - C_p}{C_n - C_V}. \quad (20)$$

Работа газа при политропических процессах. В принципе работу газа в любом процессе принципиально можно вычислить по формуле (9). Однако во многих случаях работу удобнее вычислить с помощью I начала термодинамики:

$$A = Q - \Delta U = \nu C_n \Delta T - \nu C_V \Delta T = \nu (C_n - C_V) \Delta T.$$

Подставляя сюда $C_n - C_v = -\frac{R}{n-1}$ (см. выше (19)), получим

$$A = \nu \left(-\frac{R}{n-1} \right) \Delta T = \frac{1}{n-1} \frac{m}{M} (T_1 - T_2) = \frac{1}{n-1} (p_1 V_1 - p_2 V_2).$$

Мы получили еще две формулы для работы в любом политропическом процессе:

$$A = \frac{m}{M} \frac{(T_1 - T_2)}{(n-1)} = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{n-1}. \quad (21)$$

Последняя формула неудобна только для изотермических процессов, для которых вычислим работу непосредственно из (9). Подставим в (9) давление из

уравнения состояния: $p = \frac{m}{M} \frac{RT}{V}$:

$$A = \int_1^2 p dV = \int_1^2 \frac{m}{M} \frac{RT}{V} dV = \frac{m}{M} RT \int_1^2 \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Таким образом, в изотермическом процессе при температуре T и изменении объема от V_1 до V_2 совершается работа

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (22)$$

Внутренняя энергия и теплоемкость. Внутреннюю энергию можно выразить через число степеней свободы, если принять во внимание, что внутренняя энергия одного моля – это средняя энергия молекулы (5), умноженная на число Авогадро:

$$U_\mu = \langle \varepsilon \rangle N_A = \frac{i}{2} k T N_A = \frac{i}{2} RT. \quad (23)$$

С учетом (12) и (15) получим

$$C_v = \frac{i}{2} R; \quad C_p = \frac{i+2}{2} R. \quad (24)$$

Полученные выражения позволяют придать ещё один смысл постоянной адиабаты:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}. \quad (25)$$

Уравнение Ван-дер-Ваальса. Модель идеального газа имеет область применения, ограниченную не слишком большими давлениями. По мере роста давления наблюдаются все большие отклонения от уравнения $pV_\mu = RT$.

Выделим две причины такого поведения.

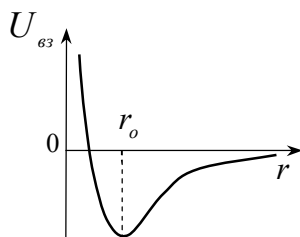


Рис.7

1. Молекулы имеют собственный объем, который уже при 100 атм составляет более половины объема газа.

2. Взаимодействие между молекулами становится существенным: типичная кривая энергии взаимодействия между двумя молекулами в зависимости

от расстояния между ними приведена на рис.7. При $r < r_o$ молекулы отталкиваются, при $r > r_o$ притягиваются. Значит, по мере сближения молекул количественно и качественно меняется характер взаимодействия между ними.

Это влияние можно учесть, введя поправки в уравнение состояния для идеальных газов, и тогда получится уравнение Ван-дер-Ваальса, которое принято записывать для одного моля:

$$\left(p + \frac{a}{V_\mu^2} \right) (V_\mu - b) = RT. \quad (26)$$

Постоянные Ван-дер-Ваальса: a и b имеют для каждого газа свои значения.

Поправка в первой скобке, $\frac{a}{V_\mu^2}$, обусловлена силами притяжения между

молекулами: при переходе к реальному газу давление на стенки сосуда уменьшается, его приходится искусственно «исправлять». Поправка b связана с уменьшением свободного объема за счет собственного объема молекул.

Лекция 5. Элементы статистической физики. Распределение Максвелла

Функция распределения. Будем исходить из того, что элементарные представления о случайной величине и свойствах вероятностей у Вас имеются. Пусть случайная величина x непрерывна. Разобьем всю область изменения x на достаточно большое число интервалов, и будем считать число попаданий величины x в тот или иной интервал. Пусть нам известна вероятность P_x попадания в тот или иной интервал Δx . Величина ΔP_x - это приращение P_x , соответствующее данному Δx . Отношение $\frac{\Delta P_x}{\Delta x}$ начиная с некоторого мало Δx перестает зависеть от величины Δx и тогда оно может служить характеристикой случайной величины. В пределе при $\Delta x \rightarrow 0$ указанное отношение называется **функцией распределения**

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta x} \equiv \frac{dP_x}{dx}. \quad (27)$$

Из определения (27) следует, что $f(x)$ является **плотностью вероятности**. На рис.8 представлена одна из возможных $f(x)$, где площадь заштрихованной полоски равна вероятности dP_x того, что случайная величина x окажется в интервале от x до $x+dx$:

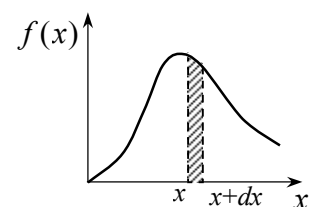


Рис.8

$$dP_x = f(x)dx. \quad (28)$$

Вероятность того, что величина x попадет в интервал от a до b равна

$$P = \int_a^b f(x)dx. \quad (29)$$

Вероятность того, что случайная величина примет любое значение в пределах всей области определения (от A до B), очевидно, равна 1:

$$\int_A^B f(x)dx = 1. \quad (30)$$

Это *условие нормировки*. Таким образом, вся площадь под кривой на рис.8 равна 1.

Средние значения. Среднее значение x можно найти по известной функции распределения:

$$\langle x \rangle = \int x dP = \int x f(x)dx. \quad (31)$$

Аналогично, среднее любой функции $\varphi(x)$, например, пусть $\varphi(x)=x^2$ равно

$$\langle x^2 \rangle = \int x^2 f(x)dx. \quad (32)$$

Распределение Максвелла. Молекулы газа, участвующие в хаотическом движении, имеют самые различные скорости. Некоторые скорости (например, очень большие, или близкие к 0) встречаются редко, а другие более часто. Так как энергия (а, следовательно, и скорость) теплового движения зависит от температуры, для каждой температуры существует скорость, которую мы встретим чаще всего, если из системы выберем достаточно большое число молекул. Каждому значению скорости отвечает своя частота появления, в пределе

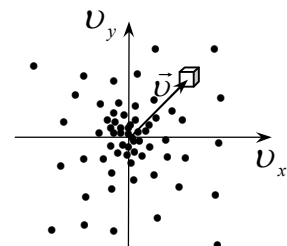


Рис.9

вероятность. Иными словами, молекулы газа распределены по скоростям. Это распределение было получено Максвеллом в 1859 году примерно таким образом. Введем пространство скоростей, где по осям вместо x, y, z , обычного декартова пространства изображают проекции скоростей: v_x, v_y, v_z . Тогда скорости каждой из N молекул в этом пространстве будет соответствовать точка - конец вектора $\vec{v}$, идущего из начала координат. Вследствие равноправности всех направлений распределение точек относительно начала координат должно быть сферически симметричным. Поэтому плотность точек будет зависеть от модуля скорости v . Выделим вблизи конца вектора $\vec{v}$ - малый объем $dv_x dv_y dv_z$ (на рис.9 ось z направлена “на нас”), в котором содержится достаточно большое ($\sim 10^4$) количество молекул dN , но малое по сравнению с N ($\sim 10^{23}$). Вероятность $dP(v_x, v_y, v_z)$ того, что конец вектора $\vec{v}$ попадет в этот объем, запишем с помощью неизвестной функции $f(v)$, зависящей только от модуля скорости из-за упомянутой выше сферической симметрии:

$$dP(v_x, v_y, v_z) = \frac{dN(v_x, v_y, v_z)}{N} = f(v) dv_x dv_y dv_z. \quad (33)$$

Вероятность того, что молекула будет иметь проекцию скорости в интервале $(v_x, v_x + dv_x)$, есть

$$dP(v_x) = \frac{dN(v_x)}{N} = \varphi(v_x) dv_x, \quad (34)$$

где $\varphi(v_x)$ - функция распределения только по проекции v_x . Вероятности попадания каждой проекции скорости в свой интервал – это вероятности независимых событий. Поэтому вероятность попадания точки в наш кубик (т.е. вероятность того, что одновременно проекции скорости окажутся в интервалах $(v_x, v_x + dv_x)$; $(v_y, v_y + dv_y)$; $(v_z, v_z + dv_z)$) равна произведению вероятностей в соответствии с теоремой об умножении вероятностей независимых событий:

$$dP(v_x, v_y, v_z) = dP(v_x)dP(v_y)dP(v_z) = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)dv_x dv_y dv_z. \quad (35)$$

Из соображений равноправия осей v_x , v_y , v_z функции φ должны быть одинаковыми функциями своих проекций. С учетом нормировки, такими функциями являются:

$$\varphi(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{mv_x^2}{2kT} \right). \quad (36)$$

Аналогичными функциями являются $\varphi(v_y)$, $\varphi(v_z)$. Сравнивая (33) и (35), находим $f(v) = \varphi(v_x) \cdot \varphi(v_y) \cdot \varphi(v_z)$. Отсюда

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right). \quad (37)$$

график функции $\varphi(v_x)$ - это гауссова кривая (рис. 10). Площадь заштрихованной полоски равна вероятности того, что проекция скорости

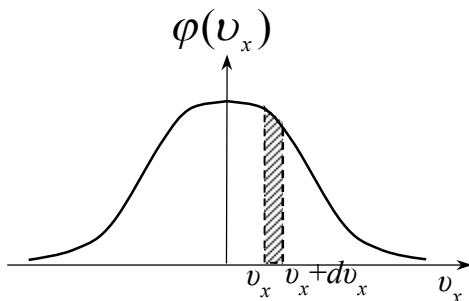


Рис.10

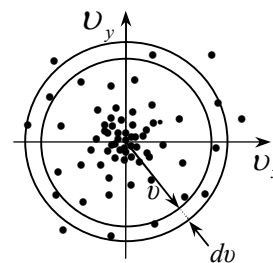


Рис.11

молекулы лежит ит в интервале

$(v_x, v_x + dv_x)$. Функции (36) нормированы на 1, т.е. площадь под обеими кривыми в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равна 1.

Найдем теперь вероятность того, что модуль скорости молекул заключен в интервале $(v, v + dv)$. Таким молекулам соответствуют точки, попадающие в шаровой слой между сферами радиусов v и $v + dv$ (рис.11). Объем этого слоя равен произведению поверхности слоя на его толщину ($4\pi v^2 dv$). Для всех точек внутри слоя объемная плотность вероятности $f(v)$ одинакова. Следовательно, вероятность попадания в этот слой

$$dP = f(v) \cdot 4\pi v^2 dv. \quad (38)$$

Искомая плотность вероятности

$$F(v) = \frac{dP}{dv} = f(v) 4\pi v^2.$$

Подставим сюда $f(v)$ из (37):

$$F(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp \left(-\frac{mv^2}{2kT} \right). \quad (39)$$

Это **распределение Максвелла по модулю скорости**. Вид функции $F(v)$ представлен на рис.12. Так как кривая $F(v)$ не симметрична, три характерные

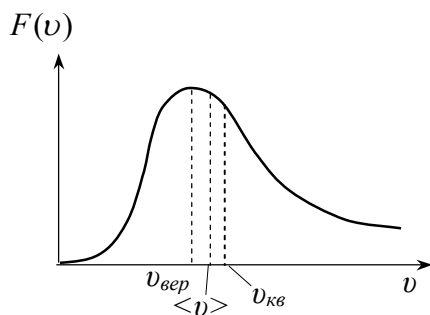


Рис.12

скорости: наивероятнейшая $v_{вер}$, средняя $\langle v \rangle$ и среднеквадратичная $v_{кв}$ не совпадают.

Наивероятнейшей скорости соответствует максимум функции $F(v)$, поэтому найдем

производную и приравняем ее нулю: $\frac{dF}{dv} = 0$,

после чего получим

$$v_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (40)$$

Средняя скорость по определению среднего равна

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v F(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \quad (41)$$

Среднеквадратичная скорость находится из определения среднего квадрата скорости

$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 F(v) dv = \frac{3kT}{m}, \Rightarrow$$

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (42)$$

Рассмотрим зависимость распределения Максвелла от температуры. Подставив значение наивероятнейшей скорости (40) в (39), получим

$$F_{\text{max}} \sim \sqrt{\frac{m}{T}}. \quad (43)$$

В соответствии с (43) и (40) по мере роста температуры T максимум кривой будет сдвигаться вправо, а его величина уменьшаться. Следовательно, по мере роста температуры скорости будут менее тесно группироваться вокруг наивероятнейшей.

Лекция 6. Распределение молекул по энергиям.

Распределение Больцмана. Барометрическая формула

Распределение молекул по их кинетическим энергиям поступательного

движения – это распределение по величине $\varepsilon = \frac{mv^2}{2}$. Поскольку вероятность

наличия у молекулы скорости в интервале $(v, v + dv)$ равна

$$dP = F(v)dv, \quad (44)$$

то, разделив и умножив правую часть этого равенства на $d\varepsilon$, получим

$$dP = F(v) \frac{dv}{d\varepsilon} d\varepsilon = \Phi(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (45)$$

Учтем, что $\varepsilon = \frac{mv^2}{2}$; $\Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dv} = mv$. Подставим в $F(v)$ квадрат скорости $v^2 = \frac{2\varepsilon}{m}$ и

в (45) $\frac{d\varepsilon}{dv} = mv$:

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}. \quad (46)$$

Распределение Больцмана. В отсутствие

внешних сил средняя концентрация молекул системы в состоянии равновесия всюду одинакова. Если газ находится во внешнем силовом поле, то все молекулы испытывают действие сил со стороны этого поля и

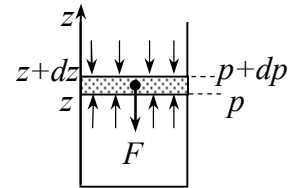


Рис.13

поэтому стремятся занять положение с минимумом потенциальной энергии.

Однако этому мешает хаотическое тепловое движение, которое стремится разбросать молекулы равномерно. В результате возникает некоторое распределение молекул по концентрациям вдоль линий действия поля. Это

распределение мы и будем искать. Пусть газ находится во внешнем потенциальном поле, силы которого направлены вертикально вниз. Направим ось z вертикально вверх (рис.13). Выделим в толще газа вертикальный столб сечением $S = 1$, а в этом столбе выделим горизонтальный слой толщиной dz на высоте z , где давление равно p . Учитывая действие сил поля вниз, можно утверждать, что с высотой давление уменьшается, $\Rightarrow p > p+dp$ (давление на высоте $z+dz$), $\Rightarrow dp < 0$. Запишем условие равновесия выделенного слоя:

$$dp = ndzF_z,$$

где $F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$, как проекция силы потенциального поля. Следовательно,

$dp = -ndU$. Считая газ идеальным, можно положить $p = nkT$, $\Rightarrow$

$$dp = kT \cdot dn, \Rightarrow kT \cdot dn = -ndU,$$

или $\frac{dn}{n} = -\frac{dU}{kT}$. Проинтегрируем последнее выражение:

$$\int_{n_o}^n \frac{dn}{n} = -\frac{1}{kT} \int_{U_o}^U dU, \Rightarrow \ln \frac{n}{n_o} = \frac{U - U_o}{kT}, \Rightarrow$$

считая, что при $n=n_o$ потенциальная энергия $U_o=0$, окончательно получим
распределение Больцмана

$$n = n_o e^{\frac{U}{kT}}. \quad (47)$$

Барометрическая формула. Рассмотрим изотермическую атмосферу в однородном поле сил тяжести (например, не слишком высоко от поверхности Земли, где поле можно считать приблизительно однородным). В этом поле потенциальная энергия молекулы массой m на высоте h равна $U = mgh$, поэтому распределение Больцмана принимает вид

$$n = n_o e^{\frac{mgh}{kT}}. \quad (48)$$

Поскольку $p = nkT$, $\Rightarrow p \sim n$, $\Rightarrow$ получим **барометрическую формулу**

$$p = p_o e^{\frac{mgh}{kT}}. \quad (49)$$

Умножив числитель и знаменатель в показателе экспоненты на число Авогадро, получим еще одно выражение для **барометрической формулы**.

$$p = p_o e^{\frac{Mgh}{RT}}, \quad (50)$$

Существенное замечание: при выводах мы предполагали, что температура не зависит от высоты, т.е. использовали модель изотермической атмосферы. На самом деле температура заметно уменьшается с высотой, учет чего сложен. Отсюда выясняется область применимости барометрической формулы: она оценивает уменьшение давления в пределах высот, на которых температура падает несущественно.

Лекция 7. Явления переноса: теплопроводность, диффузия, вязкое трение

Средняя длина свободного пробега молекул. Длиной свободного пробега λ называется расстояние, которое молекула пробегает между двумя последовательными столкновениями. Поскольку у молекул существует распределение по скоростям, то и длина свободного пробега может у разных молекул быть различной. Поэтому логично ввести среднюю длину свободного пробега $\langle \lambda \rangle$.

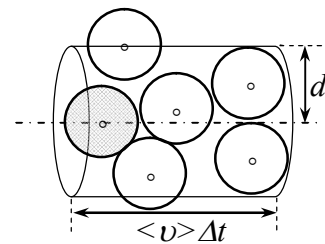


Рис.14

Рассмотрим движение одной (тонированной на рис.14) молекулы. За время Δt эта молекула пролетит расстояние $\langle v \rangle \Delta t$ и столкнется со всеми молекулами,

центры которых отстоят от ее траектории на расстояниях не больших, чем диаметр молекулы d . Значит, эта молекула столкнется со всеми молекулами, центры которых лежат внутри цилиндра радиуса d и высоты $\langle v \rangle \Delta t$.

Если концентрация молекул n , то внутри цилиндра попадет их количество, равное произведению концентрации на объем цилиндра $n\pi d^2 \langle v \rangle \Delta t$. Именно такое количество столкновений $\langle \nu \rangle$ в среднем молекула испытает за время Δt :

$\langle \nu \rangle = n\pi d^2 \langle v \rangle \Delta t$. Поскольку другие молекулы тоже движутся, то вместо средней скорости $\langle v \rangle$ в последнюю формулу следует поставить среднюю

относительную скорость их движения, которая равна $\sqrt{2} \langle v \rangle$. Таким образом, среднее число столкновений равно

$$\langle \nu \rangle = \sqrt{2} n \pi d^2 \langle v \rangle \Delta t.$$

Если мы на эту величину разделим расстояние $\langle v \rangle \Delta t$, то и получим среднюю длину свободного пробега:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{\langle v \rangle \Delta t}{\langle \nu \rangle} = \frac{\langle v \rangle \Delta t}{n \pi d^2 \sqrt{2} \langle v \rangle \Delta t} = \frac{1}{n \pi d^2 \sqrt{2}}, \text{ или}$$

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{n \pi d^2 \sqrt{2}}. \quad (51)$$

На самом деле, предположение о молекулах как об упругих шариках излишне примитивно. Столкновение на микроуровне представляет собой сложный комплекс взаимодействий не только механической природы. Поэтому величина d в формуле (51) представляет собой «эффективный диаметр», т.е. минимальное расстояние, на которое сближаются центры двух молекул. Экспериментально проще измерить $\langle \lambda \rangle$, и тогда из формулы (51) можно найти эффективный диаметр:

$$d = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2} \pi n \langle \lambda \rangle}}. \quad (52)$$

Уравнение переноса. Если система находится в неравновесном состоянии, то параметры ее состояния будут меняться со временем в различных частях самой системы. Процессы, связанные с переносом физических величин в объеме вещества, называют явлениями переноса. К явлениям переноса относятся диффузия (перенос массы), теплопроводность (перенос внутренней энергии), внутреннее трение (перенос импульса).

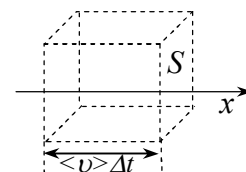


Рис.15

Все перечисленные явления переноса в своей основе описываются похожими уравнениями. Поэтому можно рассмотреть сначала математическую основу явлений переноса абстрактно.

Пусть вдоль оси x может переноситься физическая величина A . Это значит,

производная $\frac{dA}{dx} \neq 0$. Подсчитаем число N молекул, пересекающих за время Δt

площадку S , перпендикулярную оси x . Это число равно числу молекул в параллелепипеде на рис.15, при условии, что они летят вдоль ox со средней

скоростью $\langle v \rangle$: $N = \frac{1}{6} n \langle v \rangle \Delta t \cdot S$. Единицу площади за единицу времени

пересекают $\frac{N}{\Delta t \cdot S} = \frac{1}{6} n \langle v \rangle$ молекул. Наличие явления переноса означает, что

молекулы, летящие вправо, и молекулы, летящие влево, имеют разные A . В

итоге, мерой $M(A)$ переноса величины A служит разность величин,

переносимых влево и вправо:

$$M(A) = \frac{1}{6} n \langle v \rangle A_{\text{направо}} - \frac{1}{6} n \langle v \rangle A_{\text{налево}}. \quad (53)$$

Перед прохождением через площадку S после последнего столкновения

проходят путь, равный $\langle \lambda \rangle$, поэтому слева от площадки A есть функция $x - \langle \lambda \rangle$,

а справа - функция $x + \langle \lambda \rangle$, где x – координата площадки. С учетом этого (53)

можно переписать так:

$$M(A) = \frac{1}{6} n \langle v \rangle [A(x - \langle \lambda \rangle) - A(x + \langle \lambda \rangle)].$$

Так как $A(x - \langle \lambda \rangle) = A(x) - \langle \lambda \rangle \frac{dA}{dx}$; и $A(x + \langle \lambda \rangle) = A(x) + \langle \lambda \rangle \frac{dA}{dx}$, $\Rightarrow$

$$M(A) = \frac{1}{3} n \langle v \rangle \cdot \langle \lambda \rangle \frac{dA}{dx}. \quad (54)$$

Это и есть уравнение переноса в общем случае. Теперь перейдем к частным видам этих явлений.

Диффузия в газе. Диффузией называется перенос газа от мест с большей плотностью в места с меньшей плотностью. Пусть плотность зависит только от координаты x . Тогда плотность потока массы j (масса, переносимая в единицу времени через единицу площадки S) равна

$$j = -D \frac{d\rho}{dx}. \quad (55)$$

Это – экспериментальный **закон Фика**, или **уравнение диффузии**. Минус показывает, что перенос массы происходит в направлении убывания плотности. В данном случае мерой переноса является величина j , а переносимой величиной – масса молекул, пропорциональная концентрации. Поэтому уравнение переноса (54) можно записать в виде:

$$j = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \cdot \langle \lambda \rangle m \frac{dn}{dx} = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \cdot \langle \lambda \rangle \frac{dmn}{dx} = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \cdot \langle \lambda \rangle \frac{d\rho}{dx}.$$

Сравнивая последнее выражение с (55), получим выражение для коэффициента диффузии:

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \cdot \langle \lambda \rangle,$$

что после подстановки средних величин дает:

$$D = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi d^2 n} = \frac{1}{3nd^2} \sqrt{\frac{4kT}{\pi^3 m}}, \quad (56)$$

откуда следует, что коэффициент диффузии прямо пропорционален корню квадратному из температуры и обратно пропорционален концентрации, а, следовательно, и давлению.

Теплопроводность газа возникает вследствие неодинаковой температуры в различных частях объема газа. Быстрые молекулы, попадая из горячих частей объема газа в холодные, отдают последним при столкновениях часть своей энергии. Следовательно, теплопроводность есть перенос внутренней энергии от теплых частей объема газа к холодным. Пусть температура газа зависит только от x . Из опыта установлен закон Фурье (уравнение теплопроводности):

$$q = -\kappa \frac{dT}{dx}, \quad (57)$$

где q – плотность потока тепла (количество тепла, переносимое в единицу времени через единицу площади, перпендикулярной ox),
 κ – коэффициент теплопроводности.

Минус указывает, что перенос тепла происходит в направлении уменьшения температуры. При теплопроводности мерой переноса является плотность потока тепла $M(A)=q$, а переносимой величиной – средняя кинетическая

энергия, $\Rightarrow A = \langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT$. Поэтому уравнение переноса (54) можно записать в виде

$$q = -\frac{1}{3} n \langle v \rangle \cdot \langle \lambda \rangle \frac{d \frac{i}{2} kT}{dx} = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \cdot \langle \lambda \rangle n \frac{i}{2} k \frac{dT}{dx}. \quad (58)$$

Учитывая, что $n \frac{i}{2} k = \frac{\rho}{m} \cdot \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{N_A} = \frac{\rho C_V}{M} = \rho c_V$, где C_V и c_V – молярная и удельная

теплоемкости при постоянном объеме соответственно, получим:

$$q = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \cdot \langle \lambda \rangle \rho \cdot c_V \frac{dT}{dx}.$$

Сравнивая с (58), получим формулу для коэффициента теплопроводности

$$\kappa = \frac{1}{3} \langle v \rangle \cdot \langle \lambda \rangle \rho \cdot c_v. \quad (59)$$

Подставляя средние, получим

$$\kappa = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi d^2 n} \rho \cdot c_v,$$

откуда видно, что $\kappa \sim \sqrt{T}$. Коэффициент теплопроводности прямо пропорционален корню из температуры и не зависит от давления газа.

Внутреннее трение в газе связано с силами трения между слоями газа, движущимися с различными скоростями. Молекулы, попадая из быстрого слоя в медленный, замедляются при столкновениях и, наоборот, при попадании из медленного слоя в быстрый – ускоряются. В результате происходит передача импульса и между слоями возникают силы трения, направленные по касательной к поверхностям, разделяющим слои. Из опыта известно (**закон Ньютона**), что

$$\tau = -\eta \frac{du}{dz}, \quad (60)$$

где τ – напряжение трения (сила трения, отнесенная к площади поверхности соприкосновения слоев),

η – коэффициент внутреннего трения (вязкость).

Минус возникает из-за того, что силы трения направлены противоположно относительной скорости слоев. При внутреннем трении мерой переноса является напряжение трения: $M(A) = \tau$, а переносимой величиной – модуль импульса ($A = tu$) упорядоченного движения молекулы в слое газа. Поэтому уравнение переноса (54) можно записать в виде

$$\tau = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \cdot \langle \lambda \rangle \frac{dmu}{dz} = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \cdot \langle \lambda \rangle nm \frac{du}{dz} = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \cdot \langle \lambda \rangle \rho \frac{du}{dz}.$$

Сравнивая с (60) находим выражение для коэффициента вязкости

$$\eta = \frac{1}{3} \langle v \rangle \cdot \langle \lambda \rangle \rho. \quad (61)$$

Подставляя в (61) выражения для средних скорости и длины свободного пробега, получим

$$\eta = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi d^2 n} nm = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{4kmT}{\pi^3}} \cdot \frac{1}{d^2},$$

откуда видно, что $\eta \sim \sqrt{T}$ и также не зависит от давления газа.

Лекции 8 -9. Второе начало термодинамики. Цикл Карно. Энтропия

Не все процессы, не противоречащие закону сохранения энергии, могут происходить в реальности. Причины, по которым это происходит, объясняет **II начало термодинамики**, для которого есть несколько формулировок.

1. **Клаузиус (1850): невозможен самопроизвольный переход тепла от менее к более нагретому телу, или невозможны процессы, единственным конечным результатом которых был бы переход тепла от менее нагретого тела к более нагретому.**

Работа обычного холодильника не противоречит этому утверждению, так как для его работы требуется еще энергия извне (электрическая). Поэтому понижение температуры внутри холодильника и повышение её снаружи не является **единственным** результатом работы холодильника. Не включенный в сеть холодильник, как известно, не работает.

2. Кельвин (1851): невозможны процессы, единственным конечным результатом которых было бы превращение тепла целиком в работу.

Пример. Пусть газ расширился изотермически. Внутренняя энергия не изменилась, а все полученное тепло перешло в работу. Однако это не единственный результат: в частности, изменился объем.

Можно показать, что формулировки 1 и 2 эквивалентны: из первой следует вторая и наоборот. Если бы не второе начало, можно было бы легко решить энергетические проблемы – построить двигатель, который отнимал бы

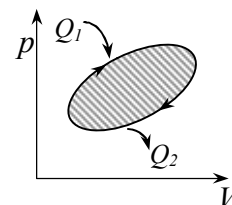


Рис.14

тепло из океанов и целиком превращал его в работу (перпетуум-мобиле II-го рода). Это позволяет перефразировать формулировку Кельвина так:

перпетуум-мобиле II-го рода невозможен, или невозможно создать тепловой двигатель с КПД=1.

Коэффициент полезного действия тепловой машины (КПД). Любой тепловой двигатель работает по замкнутому циклу (рис.14). Если процесс совершается по часовой стрелке, то работа за цикл положительна. Если на каких-то этапах рабочему телу (газу) сообщается тепло Q_1 , то, чтобы вернуться в исходное состояние газ должен на других участках цикла отдать холодильнику тепло Q_2 . Согласно I началу термодинамики приращение внутренней энергии за цикл = 0, так как система вернулась в исходное состояние, а внутренняя энергия есть функция состояния. Поэтому, работа за цикл $A = Q_1 - Q_2$. КПД теплового двигателя определяется как отношение полезной работы A к полученному теплу Q_1 , $\Rightarrow$

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (51)$$

Иначе говоря, $\eta = 1$ запрещено II-м началом термодинамики. Опыт также показывает, что $\eta < 1$.

Необратимость процессов. Все процессы в макросистемах являются необратимыми. Обратимые процессы – это идеализация, удобная для решения многих важных вопросов. В чем причина необратимости? Необратимость выглядит особенно странно, если учесть, что все законы механики обратимы во времени. И, тем не менее, никто не видел, чтобы, например, разбившаяся ваза самопроизвольно восстановилась из осколков. Загадочны и запреты, устанавливаемые вторым началом термодинамики. Решение этой сложной проблемы пришло с открытием новой термодинамической величины – энтропии - и раскрытием её физического смысла.

Энтропия. По Клаузиусу, энтропия вводится через её элементарное приращение

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (51)$$

Как известно, δQ не является дифференциалом функции, но после деления на температуру получается полный дифференциал! В отличие от теплоты, энтропия S является такой же функцией состояния как температура, внутренняя энергия или давление. Полученное системой тепло Q зависит от процесса перехода из начального состояния в конечное. Приращение энтропии ΔS совершенно не зависит от процесса, а только от начального и конечного состояний. В интегральной форме соотношение (51) принимает вид

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}, \quad (52)$$

причем совершенно не важно, какой процесс произошел между состояниями 1 и 2, этот процесс может быть даже необратимым, важно лишь, чтобы состояния 1 и 2 были равновесными. Знак равенства в (51) и (52) относится только к квазистатическим (равновесным) процессам. В остальных случаях знак "=" заменяется на знак ">". Это значит, при неравновесных процессах энтропия получает ещё дополнительное приращение, обусловленное самой

необратимостью процесса. Следует добавить, что определение энтропии по формулам (51) и (52) позволяет вычислить только изменение энтропии, но не её абсолютное значение. Это значит, что энтропия определена с точностью до константы. Перечислим некоторые свойства энтропии.

1. Энтропия – функция состояния. Если процесс адиабатический, то $Q=0$, $\Rightarrow$ энтропия остается постоянной.
2. Энтропия аддитивна: энтропия макросистемы равна сумме энтропий её отдельных частей.
3. Несколько позднее мы получим еще одно свойство: энтропия S характеризует степень беспорядка в макросистеме: состояниям с большим беспорядком отвечает большее значение энтропии. Принцип возрастания энтропии замкнутых систем является еще одной формулировкой II-го начала термодинамики:

энтропия замкнутой (теплоизолированной) системы не уменьшается – она либо возрастает, либо остается постоянной.

Величина возрастания энтропии в замкнутой макросистеме может служить мерой необратимости процессов. В пределе, когда процессы обратимы, энтропия замкнутой системы остается постоянной. Оказывается, все самопроизвольно и в изолированных условиях протекающие в природе процессы протекают с возрастанием энтропии. Необходимо специальное взаимодействие с окружающей средой, чтобы препятствовать возрастанию энтропии в макросистеме. Ярким примером могут служить все живые существа.

Примеры применения энтропии.

[1]. Уравнение I-го начала термодинамики с помощью энтропии можно переписать так:

$$TdS = dU + pdV. \quad (53)$$

2. Энтропия идеального газа. Разделим равенство (53) на T и подставим для 1 моля газа $dU_\mu = C_v dT$:

$$dS_\mu = C_v \frac{dT}{T} + p \frac{dV_\mu}{T}.$$

Из уравнения состояния для 1 моля газа ($pV_\mu = RT$) найдем $\frac{p}{T} = \frac{R}{V_\mu}$ и подставим во второе слагаемое:

$$dS_\mu = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV_\mu}{V_\mu}.$$

Дифференциал от логарифма уравнения ($pV_\mu = RT$) есть $\frac{dp}{p} + \frac{dV_\mu}{V_\mu} = \frac{dT}{T}$, поэтому

$$dS_\mu = C_v \left(\frac{dp}{p} + \frac{dV_\mu}{V_\mu} \right) + R \frac{dV_\mu}{V_\mu}, \Rightarrow dS_\mu = C_v \frac{dp}{p} + C_v \frac{dV_\mu}{V_\mu} + R \frac{dV_\mu}{V_\mu}, \Rightarrow$$

$$dS_\mu = C_v \frac{dp}{p} + (C_v + R) \frac{dV_\mu}{V_\mu}, \Rightarrow dS_\mu = C_v \frac{dp}{p} + C_p \frac{dV_\mu}{V_\mu}.$$

Проинтегрируем это уравнение между двумя состояниями 1 и 2:

$$\Delta S_\mu = S_{2\mu} - S_{1\mu} = C_v \ln \frac{p_2}{p_1} + C_p \frac{V_2}{V_1}. \quad (54)$$

Вследствие аддитивности энтропии, приращение энтропии для ν молей газа будет в ν раз больше.

3. Возрастание энтропии при смешении газов. Пусть в двух половинках теплоизолированного сосуда находятся одинаковые количества двух различных идеальных газов. После удаления перегородки газы будут равномерно перемешиваться, т.е. система со временем перейдет в равновесное состояние при той же температуре. Рассмотрим процессы изотермического распространения каждого газа в чужую половину, как независимые.

Изменение энтропии для одного из них равно $\Delta S = \int \frac{pdV}{T}$, так как внутренняя энергия не изменилась,

$$\Rightarrow \Delta S = \int \frac{\nu R dV}{V} = \nu R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} = \nu R \ln 2 > 0, \Rightarrow$$

энтропия возрастает, и окончательно $\Delta S = \nu R \ln 2$. Вследствие аддитивности энтропии, приращение энтропии для двух газов в два раза больше:

$$\Delta S = 2\nu R \ln 2.$$

Цикл Карно. Тепловой двигатель Карно состоял из нагревателя с температурой T_1 , холодильника с температурой T_2 и рабочего тела (идеального газа в цилиндре под поршнем), способного получать тепло и совершать работу. Карно рассмотрел цикл (рис.15) из двух изотерм (ab и cd) и двух адиабат (bc и da). При изотермическом расширении (ab) газ находится в контакте с нагревателем при температуре T_1 , и получает тепло Q_1 . При изотермическом сжатии (cd) газ находится в контакте с холодильником при температуре T_2 , и отдает холодильнику Q_2 . В соответствии с (51) КПД теплового двигателя равен

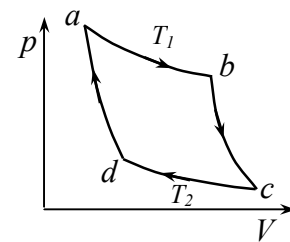


Рис.15

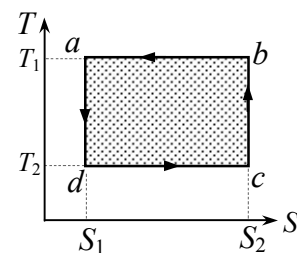


Рис.16

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (55)$$

Цикл Карно является обратимым, т.е. он может быть проведен бесконечно медленно в обратном направлении и при этом газ совершит отрицательную работу, холодильник отдаст газу тепло Q_2 , нагреватель получит обратно тепло Q_1 . Именно так работает холодильник. Дальнейшие рассуждения удобнее проводить в координатах T - S (температура-энтропия), когда цикл изображается прямоугольником (рис.16). В этом случае изотермы изображаются отрезками ab и cd , адиабаты – отрезками bc и da . В соответствии с (52) $Q_1 = T_1(S_2 - S_1)$ и равно площади под отрезком ab . Отданное холодильнику тепло $Q_2 = T_2(S_2 - S_1)$ и равно площади под отрезком cd . Площадь прямоугольника, равная $Q_1 - Q_2$, есть работа A , совершаемая двигателем за цикл. Подставив выражения для Q_1 и Q_2 в (55), получим КПД цикла Карно

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (56)$$

Полученный вывод составляет содержание знаменитой теоремы Карно:

КПД обратимых двигателей, работающих по циклу Карно, зависит только от температур T_1 и T_2 - нагревателя и холодильника, но не зависит ни от устройства двигателя, ни от рода рабочего вещества.

Статистический смысл второго начала термодинамики. Если состояние макросистемы охарактеризовано такими параметрами, как объем, давление, число молей и т.д. говорят, что задано ***макросостояние***. Если состояние макросистемы задано настолько подробно, что указаны положения всех её частиц, то говорят, что задано ***микросостояние***. Любое макросостояние может быть реализовано различными

• • •		<i>a</i>
• • •	•	<i>b</i>
• •	• •	<i>c</i>
•	• • •	<i>d</i>

Рис.17

способами. Число различных микросостояний, которыми может быть реализовано данное макросостояние называется **статистическим весом** этого макросостояния.

Пример. Пусть в сосуде, разделенном пополам, размещаются 4 молекулы. Варианты размещений представлены на рис.17. Пронумеруем молекулы.

Каждая из них с равной вероятностью может находиться в каждой половине.

Значит, вероятность того, что любая молекула окажется слева равна $\frac{1}{2}$.

Пребывание в левой половинке двух молекул – события независимые, поэтому

вероятность равна произведению: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; трех молекул - $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$; четырех

молекул - $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$. Рассуждая аналогично, легко понять, что любое

размещение 4-х молекул по двум ячейкам имеет вероятность $\frac{1}{16}$. Каждое

размещение соответствует одному микросостоянию, которые все перечислены в таблице 1.

Таблица 1

Способы реализации микросостояний		Число способов (статистич. вес) Ω	Обычная вероятность P
В левой половине	В правой половине		
-	1,2,3,4,	1	$\frac{1}{16}$
1	2,3,4	4	$\frac{4}{16}$
2	1,3,4		
3	1,2,4		
4	1,2,3		
1,2	3,4	6	$\frac{6}{16}$
1,3	2,4		
1,4	2,3		
2,3	1,4		
2,4	1,3		
3,4	1,2		
1,2,3	4	4	$\frac{4}{16}$
1,2,4	3		
1,3,4	2		

2,3,4	1		
1,2,3,4	-	1	$\frac{1}{16}$

Всего микросостояний $2^4=16$.

Поскольку для характеристики макросостояния не важно, какие именно из 4-х молекул находятся, например, слева, а важно сколько их, то макросостояние характеризуется числом молекул в половинках слева и справа (аналог концентрации, параметра макросостояния). Всего различных макросостояний пять, и каждому из них соответствует свое число микросостояний (т.е. свой статистический вес Ω). Например, макросостоянию состоящему в том, что в каждой половине сосуда находятся по две молекулы отвечает статистический вес $\Omega=6$, а его вероятность $P=\frac{6}{16}$. Это наиболее вероятное макросостояние. Для

N частиц по аналогии с нашим примером вероятность каждого микросостояния

будет равна $\left(\frac{1}{2}\right)^N$, а полное число микросостояний 2^N . При $N=10^{20}$ вероятность

каждого микросостояния невообразимо мала: $P \sim 10^{-3 \cdot 10^{19}}$. Это значит, что макросостояния с очень малым статистическим весом, например все молекулы собираются в левой части сосуда, становятся практически неосуществимым.

Таким образом, ***предоставленная самой себе макросистема стремится переходить от менее вероятных макросостояний к более вероятным.*** В этом суть необратимости. Второе начало термодинамики, указывающее на необратимость перехода работы в тепло, обусловлено тем, что обратный переход означал бы переход от более вероятного состояния к менее вероятному.

Энтропия и вероятность. Если макросистема находится в неравновесном состоянии, то она самопроизвольно будет переходить в состояние с большей вероятностью – равновесие. Вместе с тем, согласно второму началу термодинамики все самопроизвольные процессы в

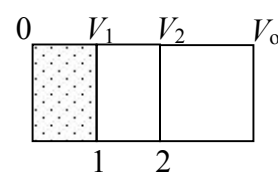


Рис.18

замкнутой макросистеме сопровождаются возрастанием энтропии. Поэтому можно ожидать, что между энтропией макросистемы в каждом состоянии и вероятностью в том же состоянии должна существовать определенная связь (идея Больцмана).

Как найти эту связь? Для этого рассмотрим необратимый процесс расширения идеального газа в пустоту. Пусть сначала газ находился в объеме V_1 теплоизолированного сосуда объемом V_0 , который разделен перегородками 1 и 2 на части (рис.18). Допустим, перегородку мгновенно перемещают из положения 1 в положение 2, газ расширяется до объема V_2 и приходит в равновесное состояние. Так как газ при этом работу не совершает ($A=0$), и ($Q=0$), $\Rightarrow$ и $\Delta U=0$, $\Rightarrow$ температура газа не меняется. Поскольку энтропия – функция состояния, то ее приращение между состояниями 1 и 2 можно вычислить все равно по какому обратимому процессу, например, изотермическому, хотя во всех остальных отношениях этот процесс протекает по-другому: совершается работа, передается тепло и т.д. В изотермическом процессе (см. (22))

$$Q = A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} ;$$

$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} N_A \frac{R}{N_A} \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Поскольку $\frac{m}{M} N_A = N$ - полному числу молекул в газе, а $\frac{R}{N_A} = k$, т.е. постоянной

Больцмана, то

$$\Delta S = Nk \ln \frac{V_2}{V_1} = k \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^N. \quad (57)$$

В состояниях 1 и 2 распределение по скоростям должно быть одинаковым, так как масса газа и его температура остались прежними. Но в конечном состоянии

молекулы стали располагаться просторнее, значит оно более вероятно.

Вероятность нахождения одной молекулы в объеме V_1 равна $\frac{V_1}{V_o}$, а всех

молекул $P_1 = \left(\frac{V_1}{V_o}\right)^N$. Аналогично, вероятность нахождения всех молекул в

объеме V_2 равна $P_2 = \left(\frac{V_2}{V_o}\right)^N$, а отношение вероятностей $\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^N$. Подставляя в

(57), получим $\Delta S = k \ln \frac{P_2}{P_1}$. Поскольку вероятность макросостояния

пропорциональна его статистическому весу, то $\frac{P_2}{P_1} = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$, $\Rightarrow$

$$\boxed{\Delta S = k \ln \frac{\Omega_2}{\Omega_1}}. \quad (58)$$

Так мы пришли к знаменитой **формуле Больцмана**:

$$\boxed{S = k \ln \Omega}. \quad (59)$$

Теперь очевидна и связь энтропии и вероятности (или стат. веса): раз все процессы идут в направлении возрастания P (и Ω), следовательно, в соответствии с формулой (59) они идут в направлении возрастания энтропии. Принцип возрастания энтропии привел Больцмана к фундаментальному выводу:

все замкнутые макросистемы стремятся переходить от состояний менее вероятных к состояниям более вероятным.

При этом сама энтропия S характеризует степень беспорядка в макросистеме: состояниям с большим беспорядком отвечает большая вероятность (и Ω) и

большее значение энтропии. Именно поэтому и возникает необратимость реальных самопроизвольных процессов. Любой вид энергии в конце концов переходит во внутреннюю энергию, т.е. в равновесное состояние, при котором «хаос» максимален – это состояние с максимальной энтропией.

Лекция 10. Состояния вещества. Фазовые переходы.

Изотермы Ван-дер-Ваальса. На рис. 19 представлены некоторые изотермы, соответствующие уравнению Ван-дер-Ваальса

$$\left(p + \frac{a}{V_{\mu}^2}\right)(V_{\mu} - b) = RT.$$

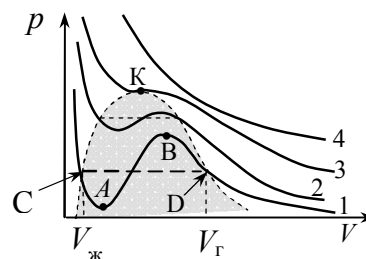


Рис.19

Температуры изотерм соотносятся как $T_1 < T_2 < T_3 < T_4$. Видно, что при достаточно высокой температуре изотерма близка к изотерме идеального газа (кривая 4), но при некоторой критической температуре T_3 на изотерме появляется точка перегиба К, которую вместе с самой изотермой также называют критической. Изотермы, расположенные ниже критической, имеют волнообразный участок, внутри которого некоторые процессы невозможны. Так, между точками А и В с изотермическим увеличением объема растет и давление, что никогда не наблюдается. На практике между точками С и D процесс идет по горизонтальному пунктирному отрезку. Оказывается, что если сжимать газ по изотерме 1, то до достижения объема V_{Γ} система остаётся в газообразном состоянии. Однако при дальнейшем сжатии часть газа переходит в жидкое состояние, и по достижении объема $V_{\text{ж}}$ газ целиком переходит в жидкое: на участке С-D наблюдается так называемый фазовый переход из газообразного в жидкое состояние. Если фазовый переход происходит изотермически, то давление остается постоянным: $p = \text{const}$. Оказывается, это общее свойство фазовых переходов: при переходах жидкость-твёрдое тело или обратно $p = \text{const}$.

Таким образом, для всех изотерм в-tonированной области, характерно одновременное сосуществование двух фаз: жидкой и газообразной, находящихся в равновесии. Такой газ (пар) называют насыщенным. Левее двухфазной области лежит область жидкого состояния. При очень специальных условиях изотермического сжатия газа, его можно довести до состояния В, а при расширении жидкости – до состояния А. Все состояния на участках А-С (перегретая жидкость) и В-Д (пересыщенный пар) являются неравновесными, или метастабильными. При малейшей флуктуации условий эти состояния скатываются на двухфазный участок.

Фазовые переходы. Различают фазовые переходы 1-го и 2-го рода. Первые требуют теплоты, необходимой, чтобы изотермически-изобарически перевести вещество из одной фазы в другую (например, из твердого в жидкое состояние). Фазовые переходы 1-го рода характеризуются удельной теплотой испарения (конденсации) и теплотой плавления (кристаллизации).

Фазовые переходы 2-го рода происходят без теплообмена. Например, изменение кристаллической модификации, переход в сверхпроводящее состояние, переход ферромагнетизма в парамагнетизм.

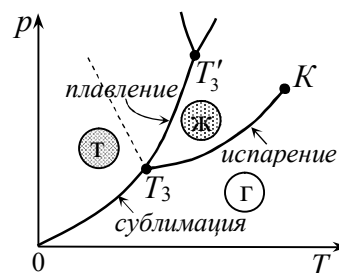


Рис.20

Можно изобразить на плоскости точки фазовых переходов и области, в которых вещество пребывает в той или иной фазе, т.е. построить фазовую диаграмму (рис.20). Фазовая диаграмма разделяет плоскость T - p на три области: твердую фазу (т), жидкую (ж) и газообразную (г), где границами являются кривые сублимации, испарения и плавления, характеризующие двухфазные равновесные состояния. В точке T_3 , которая называется тройной, в равновесии находятся три фазы. Пунктиром показана кривая плавления для веществ, у которых (например, вода) $\frac{dp}{dT} < 0$. Фазовые диаграммы позволяют наглядно представить фазовые превращения. Например, кривая испарения

заканчивается в критической точке K . Поэтому возможен переход из области жидкой фазы в газообразную путем обхода точки K сверху, без пересечения кривой испарения.

Кривая плавления может встретить на своем пути другую тройную точку T'_3 , которая является границей между двумя разными твердыми фазами.

Жидкое состояние. Молекулы газа движутся практически свободно, поскольку энергия их взаимодействия значительно меньше кинетической энергии хаотического движения. Газ вследствие этого занимает все предоставленное ему пространство. В жидкости молекулы находятся вплотную друг к другу, но имеют достаточную подвижность для хаотического перемещения. Энергия взаимодействия молекул жидкости сравнима с кинетической энергией их хаотического движения, и поэтому жидкость занимает определенный объем. В жидкости наблюдается однотипность расположения ближайших молекул по отношению к любой выбранной молекуле, так называемый *ближний порядок*, в отличие от *дальнего порядка* у кристаллических тел, где упорядоченность простирается весьма далеко.

В некоторых жидкостях с удлиненными молекулами, наблюдается упорядоченность (ориентация) в пределах значительного объема, что приводит к анизотропии свойств. Это жидкие кристаллы.

Одна из моделей жидкости, предложенная Я.И.Френкелем, исходит из предположения, что каждая молекула в течение некоторого времени колеблется около определенного положения равновесия, а затем скачком перемещается в новое положение равновесия. Теория жидкости не является завершенной, однако некоторые зависимости удастся рассчитать.

Лекция 11. Поверхностное натяжение. Явления на границе раздела фаз. Теплоемкость твердых тел.

Поверхностное натяжение. Радиус действия сил межмолекулярного взаимодействия составляет несколько межатомных расстояний, а на молекулы вблизи поверхности действуют силы, направленные внутрь жидкости.

Поэтому для выхода из жидкости молекула должна преодолеть потенциальный барьер. Выход молекулы из глубины жидкости на

поверхность сопровождается увеличением ее потенциальной энергии – за счет уменьшения кинетической. Значит, поверхностный слой обладает дополнительной

потенциальной энергией, которая вместе с площадью поверхности стремится уменьшиться. Например, капля

жидкости в условиях невесомости принимает форму шара (минимальная поверхность при данном объеме). Это свидетельствует о том, что есть силы, касательные к поверхности, называемые силами поверхностного натяжения.

Наличие поверхностного натяжения можно показать с помощью мыльной пленки (рис.21), натянутой на проволочный каркас с подвижной перемычкой (длиной l). Пленка сразу же начнет поднимать перемычку, стремясь уменьшить свою поверхность. Чтобы этому воспрепятствовать, приходится прикладывать некоторую силу $\vec{F}$. Пусть α - сила, приходящаяся на единицу длины контура (поверхностное натяжение). Поскольку поверхность двусторонняя, то силу $\vec{F}$, необходимую для смещения перемычки вниз на dx , можно выразить как

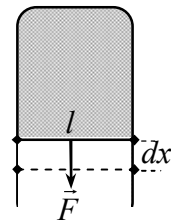
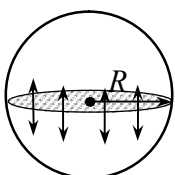


Рис.21

$$F=2\alpha l, \Rightarrow \alpha = \frac{F}{2l}. \quad (60)$$

Давление под изогнутой поверхностью. Представим сечение сферической капли жидкости с радиуса R плоскостью, проходящей через центр

(рис.22). Из-за сил поверхностного натяжения, полушария притягиваются друг к другу с силой $F=\alpha l=\alpha 2\pi R$. Поэтому в жидкости возникает дополнительное давление



$$\Delta p = \frac{F}{S} = \frac{\alpha 2\pi R}{\pi R^2} = \frac{2\alpha}{R}, \Rightarrow$$

мы получили **формулу Лапласа**

$$\Delta p = \frac{2\alpha}{R}. \quad (61)$$

В этой формуле R – величина алгебраическая. Если центр кривизны находится внутри жидкости (поверхность выпуклая), то $R > 0$, а если вне жидкости, то поверхность будет вогнутая, тогда $R < 0$. Для поверхности произвольной формы Лаплас обосновал обобщенную формулу

$$\Delta p = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (62)$$

где алгебраические величины R_1 и R_2 – радиусы кривизны в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, пересечение которых совпадает с нормалью к поверхности жидкости в интересующей нас точке. Например, для седлообразной поверхности радиусы кривизны имеют противоположные знаки.

Явления на границе раздела твердой и жидкой фаз. Рассмотрим каплю жидкости на поверхности твердого тела (рис.23). Для равновесия необходимо, чтобы все силы в точке О

уравновешивались. Эти силы состоят из сил

поверхностного натяжения α_{12} , α_{13} , α_{23} ,

действующих вдоль границ раздела между

средами. Следовательно, в проекции на

горизонтальное направление должно быть

$\alpha_{13} = \alpha_{12} \cos \Theta + \alpha_{23}$. Отсюда

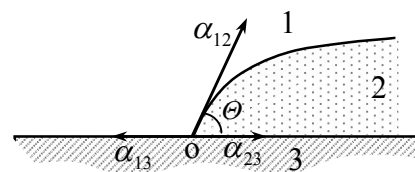


Рис. 23

$$\cos \Theta = \frac{\alpha_{13} - \alpha_{23}}{\alpha_{12}}, \quad (63)$$

где Θ - *краевой угол*. Если $\Theta < \pi/2$, то жидкость смачивает поверхность. При $\Theta \rightarrow 0$ имеет место полное смачивание. Если $\Theta > \pi/2$, то жидкость не смачивает поверхность. При $\Theta \rightarrow \pi$ наблюдается полное несмачивание.

Капиллярные явления. Наличие краевого угла приводит к искривлению поверхности жидкости (появлению *мениска*) вблизи стенок.

Если капилляр погрузить одним концом в жидкость, то в результате смачивания уровень жидкости в нем будет выше (2), чем в сосуде, а при несмачивании (1) – ниже (рис.24).

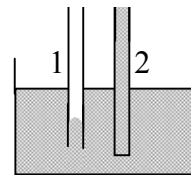


Рис.24

Найдем разность уровней h между жидкостью в сосуде и

жидкостью в капилляре радиуса r . Пусть плотность жидкости ρ и краевой угол

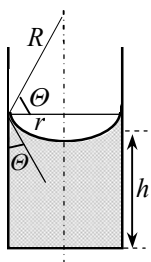


Рис.25

Θ известны (рис.25). Высота подъема жидкости h должна быть

такой, чтобы гидростатический вес столба жидкости

уравновешивался дополнительным давлением Δp под

мениском. Считая, что мениск имеет сферическую форму

радиуса R (где $R = \frac{r}{\cos \Theta}$), согласно формуле Лапласа (63)

получим

$$\Delta p = \frac{2\alpha \cos \Theta}{r} = \rho g h,$$

откуда находим разность уровней

$$h = \frac{2\alpha \cos \Theta}{\rho g r}. \quad (64)$$

Для смачивающей жидкости ($\Theta < \pi/2$) $h > 0$, $\Rightarrow$ уровень жидкости в капилляре

поднимается выше уровня жидкости в сосуде. Для несмачивающей жидкости Θ

$> \pi/2$, $h < 0$, $\Rightarrow$ уровень жидкости в капилляре опускается ниже уровня жидкости в сосуде.

Кристаллическое состояние. Большинство твердых тел имеет кристаллическое строение, т.е. упорядоченное расположение атомов, молекул, или ионов, из которых они состоят. С кристаллической структурой связана анизотропия, проявляющаяся в зависимости физических свойств кристаллов в зависимости от направления.

Макроскопически анизотропия свойств не всегда проявляется, потому, что кристаллические области мелкие и между собой расположены неупорядоченно. Такое кристаллическое строение соответствует понятию поликристалл. Чтобы вырастить монокристалл, т.е. кристалл макроскопических размеров, необходимы условия, например медленное выращивание из насыщенного раствора. Кристаллическая решетка характеризуется трансляционной симметрией. Это значит, что любому кристаллу можно сопоставить элементарную ячейку минимальных размеров, которую можно характеризовать тремя некопланарными векторами (рис.26), при перемещении вдоль которых на величину вектора решетка совмещается сама с собой. Модули этих векторов называются периодами идентичности. Кроме, того, в зависимости от типа кристалла, решетка может совмещаться сама с собой при поворотах вокруг некоторой оси на угол $2\pi/n$, где n - число совмещений за полный поворот, соответственно эта ось называется осью симметрии n -го порядка.

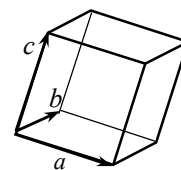


Рис.26

Плоскости, в которых лежат максимальное количество атомов решетки (часто их три разных ориентаций) называются кристаллографическими.

Расстояние между параллельными соседними кристаллографическими плоскостями совпадает с периодом идентичности в перпендикулярном плоскостям направлении.

Физические типы кристаллов. 1. Ионные кристаллы. У таких кристаллов в узлах кристаллической решетки находятся ионы противоположных знаков, связанные электростатическими силами. Пример

ионной решетки – кубический кристалл $NaCl$. У кристаллов этого типа понятие молекулы не имеет смысла: каждый ион одинаковым образом связан с 6 ближайшими ионами противоположного знака, а весь кристалл по сути дела представляет единую макроскопическую молекулу.

2. Атомные кристаллы имеют в узлах решетки нейтральные атомы, связь между которыми называется ковалентной. В этом случае связь между атомами осуществляется электронными парами: по одному электрону от каждого атома.

Примеры атомных кристаллов - графит и алмаз.

3. Металлические кристаллы имеют в узлах решетки положительные ионы, пространство между которыми заполнено электронным газом, компенсирующим отталкивание положительных ионов.

4. Молекулярные кристаллы. В узлах этих решеток расположены ориентированные определенным образом молекулы, между которыми действуют силы межмолекулярного взаимодействия.

Теплоемкость твердых тел. В основе классической теории теплоемкости твердых тел лежит закон равнораспределения энергии по степеням свободы. Твердое тело рассматривается как система N независимых друг от друга атомов, имеющих по три колебательных степени свободы. На каждую из них приходится в среднем энергия kT , $\Rightarrow$ для $3N$ колебательных степеней свободы внутренняя энергия одного моля равна $U = N_A kT = 3RT$.

Поскольку теплоемкость $C = \frac{\partial U}{\partial T}$, $\Rightarrow$

$$C = 3R. \quad (65)$$

Это – закон Дюлонга и Пти: **молярная теплоемкость всех химически простых твердых тел одинакова и равна $3R$** . Этот закон достаточно хорошо выполняется только при сравнительно высоких температурах. По мере понижения температуры теплоемкость нелинейно убывает, стремясь к нулю при $T \rightarrow 0$.

Учебное издание

Е.П.Романова

Физика
Часть I.
Курс лекций

Учебное пособие

Оригинал-макет подготовлен автором и издан в авторской редакции

Подписано в печать 15.10.13. Формат 60х84 1/16,
Усл.печ.л. 7,0. Тираж 100 экз. Заказ 315/13.
Электронный адрес: <http://publish.sutd.ru>
Отпечатано в типографии ФГБОУВПО «СПГУТД»,
191028, Санкт-Петербург, ул. Моховая, 26