

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕХНОЛОГИИ И ДИЗАЙНА»

Е. П. РОМАНОВА

ФИЗИКА

Часть 2

Курс лекций

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Санкт-Петербург

2013

УДК 53
ББК 22.3
Р86

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор кафедры общей физики РГПУ
им. А. И. Герцена *В. М. Грабов*

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики
ФГБОУВПО «Санкт-Петербургский государственный университет технологии
и дизайнв» *И. Г. Румынская*

Р 86 **Романова, Е. П.**
Физика. Часть 2. Курс лекций: учеб. пособие. - СПб.:
ФГБОУВПО «СПГУТД», 2013. – 137 с.
ISBN 978-5-7937-0898-2
ISBN 978-5-7937-0899-3

В пособии представлена часть II. курса лекций по физике, разделы электродинамика и квантовая физика. При составлении пособия использовался учебник И.В.Савельева «Курс физики», в качестве основного при изучении предмета, а также учебник И.Е.Иродова «Электромагнетизм», «Квантовая физика». Пособие представляет собой материал первого из двух семестров, предназначенных для изучения курса общей физики. Рекомендуется для дистанционного обучения студентов заочной формы обучения направлений 100700.62;100800.62; 262000.62; 262200.62; СПГУТД.

Пособие предназначено для студентов вузов.

УДК 53
ББК 22.3

ISBN 978-5-7937-0898-2
ISBN 978-5-7937-0899-3

© ГОУВПО «СПГУТД», 2013
© Романова Е.П., 2013

Введение

Настоящее учебное пособие “Часть II. Электродинамика и Квантовая физика” содержит изложение основных идей классической электродинамики и квантовой физики, включая обзор современных представлений о фундаментальных взаимодействиях и элементарных частицах. Пособие, с учетом своего предназначения для заочного обучения в течение двух семестров, содержит материал, соответствующий программе второго из этих семестров. Пособие снабжено значительным количеством рисунков и адаптировано для обучения студентов-заочников.

Следует обратить внимание, что для корректного отображения формул в электронном виде, необходимо убедиться, что редактор формул активирован должным образом.

В пособии приняты некоторые обозначения для компактного описания часто повторяющихся процедур: выражение $(1) \rightarrow (2)$ означает, что результат из формулы (1) подставляется в формулу (2); $\Rightarrow$ - является символическим обозначением слова “следовательно”; $\sim$ - пропорционально, и некоторые другие общепринятые символы математических операций.

Текст пособия организован в виде лекций. Внутри каждой лекции более мелкие разделы отделяются заголовками “в строчку”: причем название выделено полужирным курсивом, а текст начинается на той же строке абзаца. Каждый такой раздел соответствует формулировкам экзаменационных билетов, что упрощает самостоятельную подготовку к экзаменам.

Представленное пособие соответствует государственным стандартам по физике для всех направлений заочного обучения СПГУТД, и может быть рекомендовано для самостоятельной работы студентов и для дистанционного обучения.

Электродинамика

Лекция 1. Закон Кулона. Теорема Гаусса

Природа электромагнитных сил обусловлена электрически заряженными частицами, входящими в состав всех тел материального мира. Заряды обладают следующими свойствами.

- Заряды бывают двух видов: положительные и отрицательные. Одноименные заряды отталкиваются, разноименные – притягиваются.
- Алгебраическая сумма зарядов изолированной системы постоянна.
- Электрический заряд является релятивистским инвариантом.
- Наименьшим по абсолютной величине элементарным зарядом, равным $1,6 \cdot 10^{-19}$ кулона (Кл) является отрицательный заряд электрона или равный ему по модулю положительный заряд протона.

Закон Кулона: *силы, с которыми два неподвижных точечных заряда Q и q действуют друг на друга в вакууме, пропорциональны произведению их величин и обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними*

$$\vec{F} = \pm \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r, \quad (1)$$

где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; $\vec{e}_r$ – единичный вектор в направлении $\vec{r}$ (рис.1).



Рис.1

Заряды порождают в окружающем пространстве электрическое поле, проявляющееся в том, что помещенный в любую точку пробный заряд испытывает действие силы. Поле характеризуется векторной величиной, называемой напряженностью.

Напряженностью электрического поля называется отношение силы, действующей на электрический заряд q , к величине этого заряда

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (2)$$

Направление вектора $\vec{E}$ совпадает с направлением силы, действующей на положительный пробный заряд. Подставляя (2)→(1), получим выражение для **напряженности поля точечного заряда Q** :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r. \quad (3)$$

Размерность напряженности в СИ: $[E]=[B/м]$ - *вольт на метр* $=[Н/Кл]$ - *ньютон на кулон*. По известной напряженности в любой точке поля легко найти силу, действующую на точечный заряд q , помещенный в эту точку поля:

$$\vec{F} = \vec{E}q. \quad (4)$$

Принцип суперпозиции: *сила, с которой система из n зарядов, действует на заряд, не включенный в эту систему, равна векторной сумме сил, с которыми действует каждый заряд системы на данный:*

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n. \quad (5)$$

Отсюда следует и аналогичное выражение и для напряженностей:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n. \quad (6)$$

Напряженность поля системы точечных зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавал бы каждый из зарядов системы в отдельности.

Электростатические поля изображают графически с помощью силовых линий – кривых в пространстве, касательные к которым в каждой точке совпа-

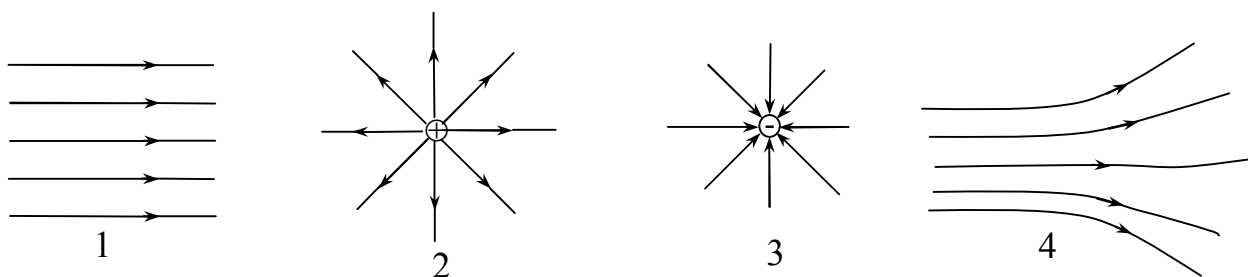


Рис.2. Электростатические поля: однородное (1); положительного (2) и отрицательного (3) точечных зарядов; неоднородное (4).

дают с вектором $\vec{E}$. Густота силовых линий выбирается так, чтобы количество линий, пронизывающих единицу поверхности, перпендикулярной силовым линиям, численно равнялось модулю вектора $\vec{E}$ (рис.2).

Силовые линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных. Поле, во всех точках которого вектор $\vec{E}$ имеет одинаковую величину и направление, называется однородным (рис.2(1)). В остальных примерах поля неоднородны.

Поток вектора напряженности электрического поля. Рассмотрим

сначала поле точечного заряда q с напряженностью $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. Опишем из это-

го заряда сферу радиуса r с площадью $S = 4\pi r^2$. Величина напряженности измеряется числом силовых линий, проходящих через единицу поверхности сфе-

ры, $\Rightarrow$ полное число линий, пересекающих сферу равно $ES = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$,

и не зависит от r ! Таким образом, произведение ES (в данном примере это и есть поток) определяется величиной порождающего поле заряда и связано простым соотношением с напряженностью. Здесь уместно сравнить поток вектора напряженности с потоком вектора скорости жидкости, вытекающей из центра сферы равномерно во всех направлениях со

скоростью v . В этом случае произведение vS (поток вектора скорости) представляет собой объем жидкости, вытекающий через поверхность сферы наружу в единицу времени. Введем теперь понятие потока вектора строго.

Потоком вектора напряженности электрического поля $\vec{E}$ через поверхность S называется величина Φ_E , равная

$$\Phi_E = \int_S E_n dS = \int_S E \cos \alpha dS = \int_S (\vec{E}, d\vec{S}), \quad (7)$$

где E_n – проекция вектора $\vec{E}$ на направление нормали $\vec{n}$ (рис.3). Вектор $d\vec{S}$ имеет величину элементарной площади dS и направление, совпадающее с направлением нормали $\vec{n}$ к этой площадке.

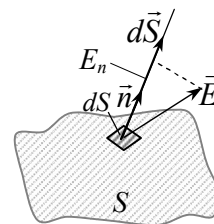


Рис.3

Теорема Гаусса. Опишем из точечного заряда q сферу радиуса r . В каждой точке сферы вектор $\vec{E}$ направлен перпендикулярно её поверхности и по величине равен

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Поэтому поток Φ_E через всю сферу равен

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \int_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_S dS = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}, \Rightarrow \end{aligned}$$

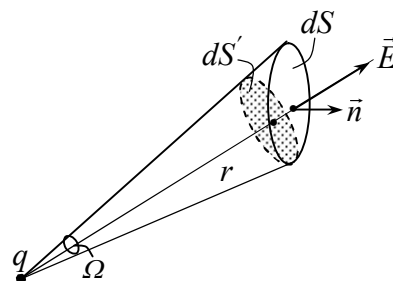


Рис. 4

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (8)$$

Окружим теперь заряд q поверхностью произвольной формы. Тогда поток $d\Phi_E$ через элемент dS этой поверхности (рис.4) равен

$$d\Phi_E = E dS \cos \alpha = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dS \cos \alpha = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dS'}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot d\Omega.$$

пределах полного телесного угла $\Omega=4\pi$ дает

$$\Phi_E = \int_S \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \cdot d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \cdot \int d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_o} \cdot 4\pi = \frac{q}{\epsilon_o}, \Rightarrow$$

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_o}. \quad (9)$$

Поток Φ_E равен заряду q внутри поверхности, деленному на ϵ_o . Если заряд q находится вне замкнутой поверхности, то $\Phi_E = 0$.

Действительно, пучок касательных, проведенных от заряда q (рис.5), делит замкнутую поверхность S на две части S' и S'' . Потоки вектора $\vec{E}$ через эти поверхности равны по величине, но имеют проти-

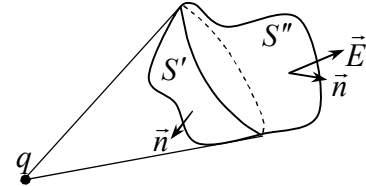


Рис.5

воположные знаки, поэтому полный поток равен нулю.

Пусть теперь внутри замкнутой поверхности находится n точечных зарядов. По принципу суперпозиции результирующая напряженность равна векторной сумме напряженностей, создаваемых каждым зарядом системы в отдельности, следовательно

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \oint_S (\sum_i \vec{E}_i, d\vec{S}) = \sum_{i=1}^n \oint_S (\vec{E}_i, d\vec{S}) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\epsilon_o} = \frac{\sum q_i}{\epsilon_o}, \Rightarrow$$

$$\boxed{\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{\sum q_i}{\epsilon_o}}. \quad (10)$$

Это теорема Гаусса: **поток вектора напряженности электрического поля Φ_E через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов внутри этой поверхности, деленной на ϵ_o .**

Чтобы обобщить теорему Гаусса для непрерывного распределения заряда в пространстве с объемной плотностью ρ , с поверхностной плотностью σ , или по линии с линейной плотностью λ , нужно суммирование в (10) заменить интегрированием. Теорема Гаусса используется для вычисления напряженности в случаях, обладающих достаточно высокой симметрией. Для

краткости будем называть гауссовой ту замкнутую поверхность S , по которой ведется интегрирование при вычислении потока.

Лекция 2. Применения теоремы Гаусса. Циркуляция вектора $\vec{E}$

Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости. Пусть плоскость равномерно заряжена с поверхностной плотностью $\sigma > 0$. Вектор $\vec{E}$ должен быть везде направлен перпендикулярно плоскости от нее. В противном случае составляющая напряженности

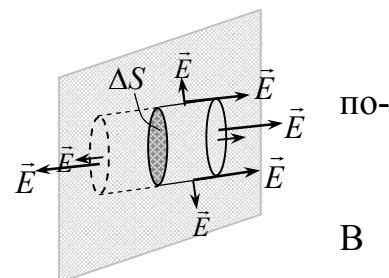


Рис.6

вдоль плоскости привела бы к перемещению зарядов, что противоречит предположению о равномерном распределении заряда по плоскости. Во всех точках, равноудаленных от плоскости величина вектора $\vec{E}$ должна быть одинакова. Поэтому в качестве гауссовой поверхности логично выбрать прямой цилиндр, симметричный относительно заряженной плоскости (рис. 6). Поток вектора $\vec{E}$ через боковую поверхность цилиндра равен нулю, так как там векторы $\vec{E}$ и $\vec{n}$ взаимно перпендикулярны, $\Rightarrow (\vec{E}, d\vec{S}) = 0$, $\Rightarrow$ на всей боковой поверхности

$\int_s (\vec{E}, d\vec{S}) = 0$. Поэтому полный поток равен сумме потоков через два основания

$2E\Delta S$, где ΔS – площадь каждого основания цилиндра. Внутри цилиндра оказался заряд $\sigma\Delta S$ (показан более плотной штриховкой). По теореме Гаусса $2E\Delta S = \sigma\Delta S/\epsilon_0$, $\Rightarrow$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (11)$$

Следовательно, напряженность не зависит от расстояния до плоскости, и с каждой стороны от плоскости поле одинаково во всех точках, т.е. однородно.

Поле двух заряженных плоскостей. Пусть две параллельные плоскости равномерно заряжены с поверхностными плотностями $+\sigma$ и $-\sigma$ (рис.7). Поле справа и слева от плоскостей равно нулю ($E = \sigma/2\epsilon_0 - \sigma/2\epsilon_0 = 0$), а между

ними ($E = \sigma/2\epsilon_0 + \sigma/2\epsilon_0 = \sigma/\epsilon_0$), следовательно

$$E = \sigma/\epsilon_0. \quad (12)$$

Такое поле создается в плоском конденсаторе. Если плоскости заряжены одноименно, то поле между ними равно нулю, а снаружи описывается формулой (12). И, наконец, если модули не равны: $|\sigma| \neq |-\sigma|$, то поле будет внутри больше, чем снаружи, но нигде не будет нулевым.

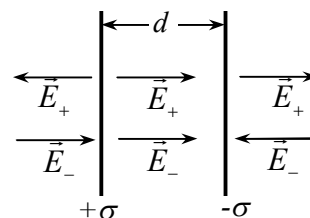


Рис.7

Поле бесконечного равномерно заряженного по по-

верхности цилиндра и нити. Пусть поверхность бесконечно длинного цилиндра

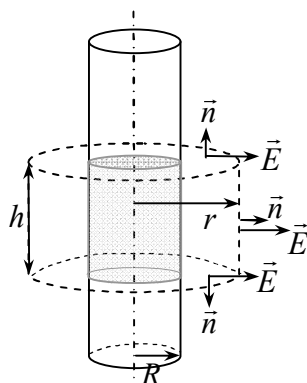


Рис.8

радиуса R заряжена равномерно, и на единицу его длины приходится заряд $\lambda > 0$. Гауссову поверхность нужно взять в виде цилиндра высоты h и радиуса r (изображен пунктиром на рис.8), коаксиального с заряженным.

Поток вектора $\vec{E}$ через боковую поверхность гауссова цилиндра равен $E2\pi rh$, а через основания – нулю, так как там вектор нормали перпендикулярен $\vec{E}$. Внутри гауссовой поверхности попадает тонированная часть заряженного

цилиндра, поэтому заряд внутри равен λh , поэтому при $r > R$ по теореме Гаусса имеем $E2\pi rh = \lambda h/\epsilon_0 \Rightarrow$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \text{ при } r > R. \quad (13)$$

Если $R \neq 0$, то при $r \rightarrow R$, $E \rightarrow \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$. При $r < R$ заряд внутри гауссова цилиндра

отсутствует, $\Rightarrow E2\pi rh = 0$, $\Rightarrow$ внутри цилиндра напряженность $E = 0$. При $R \rightarrow 0$, $E \rightarrow \infty$. Поэтому вблизи тонкого острия можно создавать поля высокой

напряженности, из-за чего заряды начинают стекать с острия в окружающее пространство. Формула (13) подходит и для нити, заряженной с линейной плотностью λ . В этом случае условие $r > R$ выполняется всегда.

Поле равномерно заряженной сферы. Пусть сфера радиуса R равномерно заряжена (не нужно говорить «по поверхности» - сфера это есть поверхность шара) с поверхностной плотностью

$\sigma > 0$. Вследствие центральной симметрии вектор $\vec{E}$ в любой точке должен быть направлен вдоль радиуса от центра, а его модуль может зависеть только от расстояния r от центра. В качестве гауссовой поверхности выберем сферу радиуса $r > R$ (рис.9). По теореме Гаусса поток вектора $\vec{E}$ через эту сферу

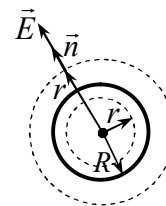


Рис.9

равен $E 4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\epsilon_0}$, $\Rightarrow$ вне сферы поле подобно полю точечного заряда:

$$E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}, \quad (14)$$

особенно если выразить σ через полный заряд сферы q и её площадь $4\pi R^2$: $\sigma = q/4\pi R^2$, откуда получим $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$. На самой заряженной поверхности $E = \sigma/\epsilon_0$.

При $r < R$ заряда внутри гауссовой сферы нет, $\Rightarrow$ внутри заряженной сферы напряженность $E = 0$.

Поле равномерно заряженного по объему шара. Пусть шар радиуса R равномерно заряжен с объемной плотностью $\rho > 0$. Гауссову поверхность выберем так же, как для сферы (рис.9) При $r > R$, следуя теореме Гаусса, получаем $E 4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho R^3}{3\epsilon_0}$

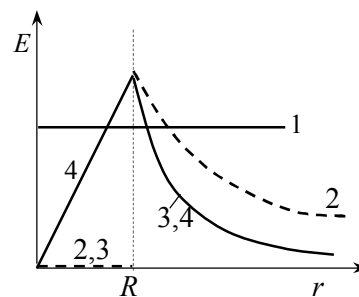


Рис.10

(чтобы найти заряд внутри, мы умножили ρ на объем шара радиуса R).

Отсюда получим напряженность снаружи и на поверхности шара:

$$E = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \quad (r \geq R). \quad (15)$$

При $r < R$ заряд внутри гауссовой сферы попадает часть заряда шара, поэтому

$$E 4\pi r^2 = \frac{4\pi \rho r^3}{3\varepsilon_0}, \text{ откуда напряженность внутри шара равна}$$

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \quad (r < R). \quad (16)$$

На рис. 10 представлены графики зависимости E от r для равномерно заряженных плоскости (1), цилиндра (2), сферы (3) и шара (4).

Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$. Как известно, работа поля центральных сил вдоль замкнутой траектории равна нулю. Такие поля называются потенциальными. Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$ является выражением свойства потенциальности электростатического поля. Работа сил электростатического поля при перемещении точечного заряда q из точки 1 в точку 2 (рис.11):

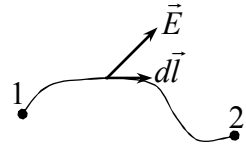


Рис.11

$$A = \int_1^2 (\vec{F}, d\vec{l}) = \int_1^2 (q\vec{E}, d\vec{l}) = q \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}). \text{ Разделим эту работу на } q:$$

$$\frac{A}{q} = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}). \quad (17)$$

Отношение A/q это работа поля переноса единичного заряда из 1 в 2. Интеграл вида (17), т.е. $\int (\vec{E}, d\vec{l})$, вычисленный вдоль замкнутой траектории, называется циркуляцией вектора $\vec{E}$.

Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$: циркуляция вектора напряженности электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю: $\oint (\vec{E}, d\vec{l}) = 0$.

Доказательство. Электростатическое поле точечного заряда является

полем центральных сил, и, следовательно, потенциальным. Поэтому его работа на замкнутом пути равна нулю: $A = \oint (\vec{F}, d\vec{l}) = 0, \Rightarrow \frac{A}{q} = \oint (\vec{E}, d\vec{l}) = 0$. Таким образом, циркуляция поля точечного заряда равна нулю. Докажем это и для системы n точечных зарядов. По принципу суперпозиции напряженность $\vec{E}$ поля системы точечных зарядов равна: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n$. Умножим это равенство скалярно на вектор перемещения $d\vec{l}$ вдоль произвольного замкнутого контура и проинтегрируем по этому контуру:

$$\oint (\vec{E}, d\vec{l}) = \oint (\vec{E}_1, d\vec{l}) + \oint (\vec{E}_2, d\vec{l}) + \dots + \oint (\vec{E}_n, d\vec{l}). \quad (18)$$

Каждый интеграл в правой части равен нулю как циркуляция вектора напряженности поля отдельного точечного заряда, следовательно, и циркуляция электростатического поля системы n точечных зарядов также равна нулю. Переходя к пределу в (18) нетрудно убедиться, что и для непрерывно распределенного заряда циркуляция электростатического поля равна нулю.

Лекция 3. Потенциал. Связь напряженности и потенциала. Поле диполя

Потенциал. Из независимости от траектории интеграла $\int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l})$ следует, что его можно представить, как убыль некоторой функции координат:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}), \quad (19)$$

$$\text{или} \quad -d\varphi = (\vec{E}, d\vec{l}). \quad (20)$$

Введенная таким образом функция координат $\varphi(\vec{r})$ называется потенциалом. Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ численно равна работе по переносу единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2. Из того, что поле способно совершить такую работу, следует, что в точках 1 и 2 заряд обладает различной

потенциальной энергией. Поэтому потенциал можно определить как потенциальную энергию пробного заряда q , отнесенную к его величине (правда саму потенциальную энергию всё равно придется вводить через ту же работу):

$$\varphi = \frac{W_n}{q}. \quad (21)$$

Кроме того, из введенных определений (19,20), а также определения самой потенциальной энергии, следует, что **потенциал определен с точностью до константы**.

Потенциал поля точечного заряда. Поскольку заряд q создает поле с напряженностью (3), скалярное произведение в формуле (20) можно преобразовать:

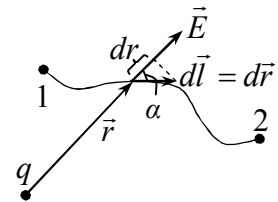


Рис.12

$$(\vec{E}, d\vec{l}) = \frac{kq}{r^2} dl \cos \alpha = \frac{kq}{r^2} dr = -d \frac{kq}{r} + const, \Rightarrow \varphi = \frac{kq}{r} + const,$$

где $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$

и учтено, что $dl \cos \alpha = dr$ (геометрия – на рис.12). Обычно полагают потенциал при $r \rightarrow \infty$ равным нулю, тогда $const = 0$. В этом случае потенциал поля точечного заряда выражается формулой

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (22)$$

Если заряды распределены непрерывно с объемной плотностью $\rho(\vec{r})$, то точечным следует считать заряд $dq = \rho dV$. Тогда потенциал можно представить интегралом по объему

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r}. \quad (23)$$

Аналогично, если заряды распределены по поверхности или линии, то интегрируют по поверхности или линии соответственно

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\sigma dS}{r}, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda dl}{r}. \quad (24)$$

Единицей потенциала является *вольт* $[\varphi] = [B]$.

Связь напряженности и потенциала. Пусть $d\vec{l}$ - вектор малого перемещения вдоль траектории. Это значит, что радиус-вектор $\vec{r}(x,y,z)$ получил приращение $d\vec{l}(dx,dy,dz)$. Тогда

$$(\vec{E}, d\vec{l}) = E_x dx + E_y dy + E_z dz = -d\varphi, \quad (25)$$

откуда следует, что $E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$. Вектор $\vec{E}$ в декартовых координатах можно представить суммой

$$\vec{E} = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z \right).$$

Дифференциальную операцию в скобках, примененную к скалярной функции φ , называют градиентом этой функции (**grad** φ). Обратите внимание: **grad** φ – это векторная функция, полученная дифференцированием скалярной функции φ ! Таким образом, связь напряженности и потенциала выражается формулой

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi. \quad (26)$$

При решении задач бывает полезно найти проекцию $\vec{E}$ на направление некоторого вектора $\vec{l}$. Так как $(\vec{E}, d\vec{l}) = E_l dl = -d\varphi$, то искомая проекция равна

$$E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l}. \quad (27)$$

Эквипотенциальные поверхности. Так называются поверхности в пространстве, на которых потенциал имеет постоянное значение. Чтобы показать, что вектор $\vec{E}$ всюду перпендикулярен эквипотенциальной поверхности, спроектируем его на касательный к этой поверхности вектор $\vec{l}$. Поскольку

$\varphi = const$ на эквипотенциальной поверхности, производная $\frac{\partial \varphi}{\partial l} = 0$, $\Rightarrow$ в соответствии с (27), равна нулю и проекция: $E_l = -\frac{\partial \varphi}{\partial l} = 0$. Если в некоторой точке проекция вектора на любое касательное направление к поверхности равна нулю,

значит, этот вектор перпендикулярен поверхности. Таким образом, **вектор $\vec{E}$ перпендикулярен эквипотенциальной поверхности и направлен с учетом знака в сторону максимальной скорости убывания потенциала.**

Потенциал системы зарядов. Напряженность поля системы точечных зарядов (6) равна

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n.$$

Умножим это выражение скалярно на вектор $d\vec{l}$

$$(\vec{E}, d\vec{l}) = (\vec{E}_1, d\vec{l}) + (\vec{E}_2, d\vec{l}) + \dots + (\vec{E}_n, d\vec{l}) = -d\varphi_1 - d\varphi_2 - d\varphi_3 \dots - d\varphi_n = -d\varphi.$$

Проинтегрируем это равенство учитывая, что в знаменателе выражения (22) для потенциала точечного заряда стоит расстояние от заряда до точки с радиус-вектором $\vec{r}$, где вычисляется потенциал. Для каждого из n точечных зарядов системы это расстояние равно $|\vec{r}_i - \vec{r}|$, где $\vec{r}_i$ - радиус-вектор i -го заряда.

Следовательно, потенциал поля системы точечных зарядов равен

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}|}. \quad (28)$$

Итак, **потенциал поля системы точечных зарядов равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов, независимо от других.**

Чтобы получить потенциальную энергию заряда q в поле системы зарядов $\{q_i\}$ достаточно потенциал той точки, где находится заряд q умножить на потенциал этой точки

$$W_n = q\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}|}. \quad (29)$$

Потенциальная энергия измеряется работой поля системы зарядов по переносу заряда q из точки с радиус-вектором $\vec{r}$ на бесконечность.

Потенциал и напряженность электростатического поля диполя. Диполь – это система из двух разноименных зарядов, расположенных друг от друга на расстоянии $l \ll r$, где $\vec{r}$ - радиус-вектор произвольной точки относительно центра диполя (рис.13). Введем вектор дипольного момента: $\vec{p} = ql$. Потенциал в точке A вычислим, как алгебраическую сумму

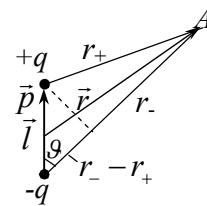


Рис.13

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q(r_- - r_+)}{4\pi\epsilon_0 r_+ r_-}.$$

Так как $l \ll r$, положим $r_+ r_- \approx r^2$; $(r_- - r_+) \approx l \cos \vartheta$. Тогда

$$\varphi = \frac{ql \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{(\vec{p}, \vec{e}_r)}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Таким образом, потенциал поля диполя равен

$$\varphi = \frac{p \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{(\vec{p}, \vec{e}_r)}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (30)$$

Напряженность поля диполя найдем в проекциях на вектор $\vec{r}$ (E_r) и на перпендикулярное к $\vec{r}$ направление (E_g):

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2p \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \quad E_g = -\frac{\partial \varphi}{r \partial \vartheta} = \frac{p \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (31)$$

Модуль вектора $\vec{E}$ найдем по теореме Пифагора

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_g^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{4\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta},$$

что после подстановки $\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1$ дает

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \vartheta}. \quad (32)$$

Напряженность поля диполя убывает обратно пропорционально третьей степени расстояния – быстрее, чем поле точечного заряда. Из (32) легко получить и другие проекции вектора $\vec{E}$: параллельную ($\vartheta=0$) и перпендикулярную оси диполя ($\vartheta=\pi/2$):

$$E_{\parallel} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \quad E_{\perp} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (33)$$

Лекция 3. Постоянный электрический ток. Закон Ома.

Закон Джоуля-Ленца

Электрический ток и вектор плотности тока. Ток в проводнике представляет собой направленное движение заряженных частиц. Сила тока (или просто ток) определяется как производная по времени от суммарного заряда $Q(t)$, прошедшего через поперечное сечение проводника к моменту времени t :

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}. \quad (34)$$

Средней по сечению проводника плотностью тока называется отношение силы тока к площади сечения проводника $j_{cp} = \frac{I}{S}$. В общем случае плотность тока может быть разной в различных точках сечения. Величина вектора плотности тока численно равна заряду, протекающему в единицу времени через дифференциально малую площадку, перпендикулярную скорости направленного движения зарядов. За направление вектора плотности тока $\vec{j}$ принимается направление средней скорости направленного движения зарядов. В соответствии с этими определениями, при концентрации n частиц в проводнике с зарядом e каждая, и их средней скорости направленного движения $\vec{v}_{cp}$ вектор плотности тока равен

$$\vec{j} = en\vec{v}_{cp}. \quad (35)$$

Выделим внутри проводника малую площадку dS (рис.14).

Заряд, прошедший через нее за время dt , равен

$dq = j \cos \alpha dS dt = (\vec{j}, d\vec{S}) dt$, где α – угол между векторами $\vec{j}$ и $d\vec{S}$. Заряд dQ , прошедший через все сечение проводника,

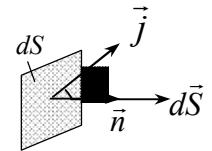


Рис.14

равен интегралу $dQ = \left(\int_S j \cos \alpha dS \right) dt$, откуда ток, протекаю-

щий через все сечение проводника, равен

$$I = \int_S (\vec{j}, d\vec{S}). \quad (36)$$

Таким образом, **сила тока является потоком вектора плотности тока.**

Единица силы тока называется ампер $[I] = [A]$ и является основной электрической единицей в системе СИ, ее точное определение будет дано позднее.

Электродвижущая сила (эдс). Если проводник внести в электростатическое поле, то заряды будут двигаться до тех пор, пока их собственное поле не

скомпенсирует поле внешнее, после чего практически мгновенно ток прекратится. Для поддержания тока к зарядам необходимо приложить силы не электростатической природы, называемые *сторонними*. Пусть на некотором участке цепи действуют сторонние силы с напряженностью $\vec{E}^*$ и силы электростатического поля с напряженностью $\vec{E}$. Вычислим работу, необходимую для переноса заряда q из точки 1 в точку 2

$$A_{12} = \int_1^2 (q(\vec{E} + \vec{E}^*), d\vec{l}) = \int_1^2 (q\vec{E}, d\vec{l}) + \int_1^2 (q\vec{E}^*, d\vec{l}).$$

Разделим обе части на q

$$\frac{A_{12}}{q} = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}) + \int_1^2 (\vec{E}^*, d\vec{l}).$$

Величина $U = \frac{A_{12}}{q}$ называется **напряжением** и равна суммарной работе электростатических и сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда из 1 в 2. Первое слагаемое $\int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}) = \varphi_1 - \varphi_2$ - это введенная ранее разность потенциалов (см.19), а второе называется **электродвижущей силой** (эдс), которая численно равна работе поля сторонних сил, необходимой для переноса единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2

$$\varepsilon = \int_1^2 (\vec{E}^*, d\vec{l}). \quad (37)$$

Следовательно,

$$U = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon. \quad (38)$$

Если точки 1 и 2 совпадают ($\varphi_1 = \varphi_2$), $\Rightarrow$ цепь замкнута, тогда эдс представляет собой циркуляцию вектора напряженности поля сторонних сил. Если на

участке не действуют сторонние силы (такой участок называется однородным, $\text{эдс}=0$), то $U = \varphi_1 - \varphi_2$, $\Rightarrow$ **для однородного участка цепи напряжение совпадает с разностью потенциалов.**

Закон Ома в дифференциальной форме описывает связь между векторами $\vec{E}$ и $\vec{j}$. Пусть электрон движется в поле с напряженностью $\vec{E}$. По второму закону Ньютона, он приобретает ускорение $\vec{a} = -e\vec{E}/m$, а его скорость возрастает по закону $\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{a}t = \vec{v}_o - \frac{e\vec{E}t}{m}$, где $\vec{v}_o$ - скорость электрона в отсутствии внешнего поля. При каждом столкновении происходит передача кинетической энергии электрона кристаллической решетке, и скорость падает почти до нуля. Усредним выражение для скорости в пределах среднего времени между столкновениями τ

$$\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_o \rangle - \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{e\vec{E}t}{m} dt = \langle \vec{v}_o \rangle - \frac{1}{2} \frac{e\vec{E}}{m} \tau.$$

Среднее значение скорости $\langle \vec{v}_o \rangle = 0$ вследствие хаотичности скорости в отсутствие поля. Поэтому $\langle \vec{v} \rangle \cong -\frac{1}{2} \frac{e\vec{E}}{m} \tau$. Учитывая определение $\vec{j} = en\langle \vec{v} \rangle$ (35), вектор плотности тока $\vec{j} \cong -\frac{1}{2} \frac{e^2 n}{m} \tau \vec{E}$. Произведение констант, стоящих перед $\vec{E}$, также является некоторой константой σ , $\Rightarrow$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (39)$$

Этот результат называется **законом Ома в дифференциальной форме: плотность тока в каждой точке проводника пропорциональна напряженности поля в этой точке**. Величина σ называется *проводимостью*. Этот закон с высокой точностью выполняется только для металлов.

Часто закон Ома в дифференциальной форме записывают в виде

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}, \quad (40)$$

где ρ – удельное сопротивление, которое возрастает с увеличением температуры $t, ^\circ C$ по закону:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad (41)$$

где α – температурный коэффициент сопротивления.

Закон Ома в интегральной форме. В простейшем случае для однородного участка цепи этот закон был установлен экспериментально

$$I = \frac{U}{R}. \quad (42)$$

Величина R (сопротивление проводника) зависит от его формы, температуры и материала

$$R = \frac{\rho l}{S}, \quad (43)$$

где l – длина, S – площадь поперечного сечения проводника. Единицей сопротивления является ом: $[R]=[Ом]$. Размерность удельного сопротивления $[\rho]=[Ом \cdot м]$.

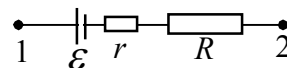


Рис.15

Рассмотрим **неоднородный участок** цепи, т.е. содержащий эдс. Реальный источник эдс можно рассматривать как идеальный, к которому последовательно присоединено его внутреннее сопротивление r (рис.15). Тогда $U=I(R+r) \rightarrow (38), \Rightarrow$

закон Ома в интегральной форме

$$I(R+r) = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon. \quad (44)$$

Произведение силы тока в проводнике на сумму внешнего и внутреннего сопротивлений равно сумме разности потенциалов на концах проводника и действующей в проводнике эдс.

В замкнутой цепи точки 1 и 2 совпадают и $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, поэтому закон Ома принимает вид

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (45)$$

Когда цепь разомкнута, ток равен нулю, и тогда $|\varphi_1 - \varphi_2| = \mathcal{E}$. **Эдс источника равна разности потенциалов на его зажимах при разомкнутой цепи.**

Закон Джоуля-Ленца в интегральной форме. Работа A при перемещении заряда q из точки 1 в точку 2 равна $A = \int_1^2 qEdl = q \int_1^2 Edl = qU$.

Мощность определяется как производная от работы или энергии

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} qU = \frac{dq}{dt} U, \Rightarrow$$

$$P = IU. \quad (47)$$

Если на участке нет эдс, и вся работа тока идет на нагревание, то за время dt в проводнике выделится количество теплоты $dQ = P(t)dt = IUdt$. Поскольку $U = IR$, $\Rightarrow dQ = I^2 Rdt$. Интегрируя, получим **закон Джоуля-Ленца в интегральной форме**:

$$Q = \int_0^t I^2 Rdt. \quad (48)$$

Если ток постоянный, то выражение упрощается: $Q = I^2 Rt$.

Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме. Вычислим энергию, которая выделяется в малом объеме проводника dV , предполагая для простоты, что

векторы $\vec{j} \uparrow \uparrow \vec{E} \uparrow \uparrow d\vec{l}$ (рис.16). При перемещении заряда dq на $d\vec{l}$ поле совершает работу $dA = dqEdl$. Подставим из закона Ома

$E = \rho j$, и $dq = j dS dt$: $dA = j^2 dt \rho dS dl = \rho j^2 dV dt$. Считая, что вся эта работа идет на нагревание ($dA = dQ$), получим $dQ = \rho j^2 dV dt$, где $dV = dS dl$. Тогда теплота, выделяющаяся в единице объема проводника в единицу времени, равна

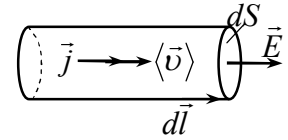


Рис.16

$$\frac{dQ}{dV dt} = \rho j^2. \quad (49)$$

Величина слева называется удельной тепловой мощностью тока, а сам **Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме утверждает: удельная тепловая мощность тока пропорциональна квадрату плотности тока в той же точке.**

Лекция 4. Магнитное поле в вакууме. Сила Лоренца. Закон Ампера. Закон Био-Савара

Сила Лоренца. Опыт показывает, что сила, действующая на заряд q , зависит от его положения и скорости. Эту силу разделяют на две составляющие – электрическую $\vec{F}_e$ (не зависит от скорости заряда) и магнитную $\vec{F}_m$ (она зависит от его скорости). Пусть магнитное поле описывается вектором магнитной индукции $\vec{B}$. Опыт показывает, что на заряд q , движущийся со скоростью $\vec{v}$, действует магнитная сила

$$\vec{F}_m = q[\vec{v}, \vec{B}], \quad (50)$$

по которой можно определить вектор $\vec{B}$. На покоящийся заряд в магнитном поле сила не действует. Сила $\vec{F}_m$ перпендикулярна вектору скорости $\vec{v}$, поэтому она работы не совершает. Если есть еще и электрическое поле, то результирующая сила (она называется **силой Лоренца**) равна

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]. \quad (51)$$

Магнитное поле равномерно движущегося заряда. Опыт показывает, что магнитное поле не только действует на движущиеся заряды, но и порождается также движущимися зарядами. Точечный заряд q , движущийся со скоростью $\vec{v}$, создает поле с магнитной индукцией

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (52)$$

где магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$; $\vec{r}$ - радиус-вектор, проведенный от заряда q к точке наблюдения. Для магнитных полей, также как и для электрических, справедлив принцип суперпозиции.

Закон Био-Савара. Рассмотрим магнитное поле, создаваемое постоянными электрическими токами. Подставим в (52) вместо q малый заряд ρdV и $d\vec{B}$ вместо $\vec{B}$, из-за малости ρdV :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\rho dV[\vec{v}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dV[\rho\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}. \quad (53)$$

Так как $\vec{j} = en\langle\vec{v}\rangle$, и $en = \rho$, то при скорости $\vec{v}$ направленного движения зарядов $\vec{j} = \rho\vec{v} \rightarrow (53)$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j}, \vec{r}]dV}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j}, \vec{r}]Sdl}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j}S, \vec{r}]dl}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3},$$

где $d\vec{l} \uparrow \vec{j}$, что всегда выполняется для тонкого провода.

Мы получили **закон Био-Савара**

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}}. \quad (54)$$

Учитывая, что $\vec{j}dV = Id\vec{l}$ (см. 53 - 54), вектор $\vec{B}$ равен

$$\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}, \quad \text{или} \quad \vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j}, \vec{r}]dV}{r^3}. \quad (55)$$

Лекция 5. Магнитное поле постоянных токов

Теорема Гаусса для вектора $\vec{B}$. Графически магнитное поле может быть представлено линиями вектора $\vec{B}$, касательная к которым в каждой точке совпадает с направлением вектора $\vec{B}$, а густота линий равна его модулю. **Теорема Гаусса для поля вектора $\vec{B}$** постулируется следующим образом. **Поток вектора $\vec{B}$ сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю:**

$$\oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0. \quad (56)$$

Эта теорема выражает тот факт, что линии вектора $\vec{B}$ не имеют ни начала, ни конца. Поэтому число линий, выходящих из любого объема, ограниченного замкнутой поверхностью S , всегда равно числу линий, входящих в этот объем. Отсюда, поток вектора $\vec{B}$ сквозь незамкнутую поверхность S , ограниченную некоторым замкнутым контуром, не зависит от формы этой поверхности.

Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$ (для магнитного поля постоянных токов в вакууме). **Циркуляция вектора $\vec{B}$ поля по любому замкнутому контуру Γ равна произведению μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых контуром Γ :**

$$\oint (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_0 \sum I_k. \quad (57)$$

Каждый ток в сумме – величина алгебраическая: ток считается >0 , если направление движения положительных зарядов в нем связано с направлением обхода

контура правилом правого винта. Это поле не потенциально. Подобные поля называют *вихревыми*, или *соленоидальными*.

Теорема о циркуляции может быть применена для расчета поля вектора $\vec{B}$. Сравним расчет магнитного поля прямого тока при помощи закона Био-Саварра с расчетом, в котором используется теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$.

Магнитное поле прямого тока. В соответствии с (54) в произвольной точке A векторы $d\vec{B}$ от всех элементов тока $d\vec{l}$ имеют одинаковое направление – за плоскость рисунка. Поэтому сложение векторов $d\vec{B}$ можно заменить сложением их модулей (рис.17)

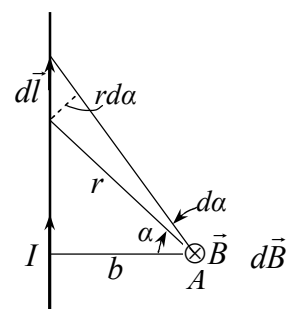


Рис.17

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{Idl \cos \alpha}{r^2}. \quad (58)$$

Из рисунка $dl \cos \alpha = r d\alpha$ и $r = b / \cos \alpha$, $\Rightarrow dB = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I \cos \alpha d\alpha}{b}$. Интегрируем от $-\pi/2$ до $+\pi/2$, $\Rightarrow$

$$B = \frac{\mu_o I}{4\pi b} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_o I}{4\pi b} \sin \alpha \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\mu_o I}{4\pi b} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\mu_o 2I}{4\pi b}, \Rightarrow$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_o 2I}{4\pi b}}. \quad (59)$$

Решим эту же задачу при помощи теоремы о циркуляции. Причем в данном случае откажемся от предположения о тонком проводнике. Пусть постоянный ток I течет вдоль бесконечного прямого провода, имеющего круглое сечение радиуса a , перпендикулярно рисунку 18.

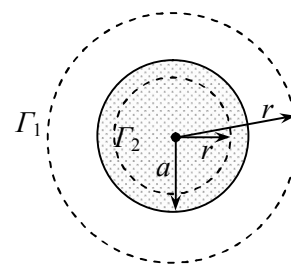


Рис.18

Найдем индукцию поля $\vec{B}$ снаружи и внутри провода. Из симметрии задачи следует, что силовые линии должны иметь вид перпендикулярных проводу окружностей с центром

на оси провода. Модуль вектора $\vec{B}$ должен быть одинаков для всех точек, с

одинаковым расстоянием r от оси. Для контура Γ_1 по теореме о циркуляции

$$B2\pi r = \mu_0 I, \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{ при } (r > a), \text{ что по смыслу совпадает с (59) ; для контура } \Gamma_2:$$

$$B2\pi r = \mu_0 I \left(\frac{r}{a} \right)^2, \text{ так как внутри этого контура попадает только часть}$$

тока, пропорциональная отношению сечений. $\Rightarrow$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(\frac{r}{a} \right)^2 \text{ при } (r \leq a).$$

Магнитное поле соленоида. Соленоидом называется провод, намотанный на цилиндрическую поверхность (рис.19). Пусть по этому проводу течет ток I и на единицу длины соленоида приходится n витков проводника.

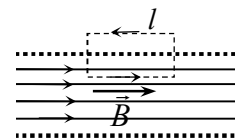


Рис.19

Если шаг витка мал, то каждый виток можно приблизительно считать окружностью. Опыт и расчет показывают, что чем длиннее соленоид, тем меньше поле снаружи, а при бесконечно длинном соленоиде поле снаружи вообще отсутствует. Поле внутри из соображений симметрии должно быть направлено вдоль оси соленоида и составлять с направлением тока в витках правовинтовую систему. Эти же соображения подсказывают форму контура – прямоугольник, расположенный, как показано на рисунке 19. Циркуляция по данному контуру $= Bl$ и контур охватывает ток nIl , $\Rightarrow$ по теореме о циркуляции $Bl = \mu_0 nIl$. Следовательно, поле внутри соленоида равно

$$B = \mu_0 nI. \quad (60)$$

Закон Ампера. На каждый носитель тока в проводнике действует магнитная сила, а, следовательно, и на сам проводник, по которому движутся заряды. В результате магнитное поле действует с определенной силой на сам проводник с током. Величину этой силы и определяет закон Ампера.

Пусть объемная плотность носителей тока в проводнике равна ρ .

В элементе объема dV проводника содержится заряд ρdV , который можно считать точечным вследствие его малости. Тогда элементарная магнитная сила Лоренца, действующая на этот заряд, равна $d\vec{F} = \rho dV[\vec{u}, \vec{B}]$, где $\vec{u}$ - скорость упорядоченного движения зарядов. Плотность тока $\vec{j} = \rho\vec{u}$, поэтому $d\vec{F} = dV[\vec{j}, \vec{B}]$. Если ток течет по тонкому проводу, то $\vec{j}dV = Id\vec{l}$, $\Rightarrow$

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (61)$$

Это и есть **закон Ампера**, выражающий силу, действующую на элемент тонкого провода $d\vec{l}$, по которому течет ток I .

Сила, действующая на контур с током. Результирующая амперова сила, которая действует на контур с током в магнитном поле, определяется интегрированием выражения (61):

$$\vec{F} = I \oint [d\vec{l}, \vec{B}]. \quad (62)$$

Если магнитное поле однородно, то вектора $\vec{B}$ можно вынести из-под интеграла и задача сводится к вычислению векторного интеграла $\oint d\vec{l}$. Этот интеграл представляет собой замкнутую цепочку векторов $d\vec{l}$ и поэтому он равен нулю, значит и $\vec{F} = 0$. Т.е. результирующая амперова сила равна нулю в однородном магнитном поле.

Рассмотрим поведение в магнитном поле плоского контура достаточно малых размеров. Такой контур называется *элементарным*. Магнитным моментом элементарного контура называется произведение

$$\vec{p}_m = IS\vec{n} = I\vec{S}, \quad (63)$$

где I - ток, $\vec{S}$ - вектор, равный площади контура по величине и совпадающей с положительной нормалью к контуру по направлению (рис.20). Достаточно сложный расчет по формуле (62) приводит к следующему выражению для

силы, действующей на элементарный контур с током в неоднородном магнитном поле:

$$\vec{F} = p_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial n}.$$

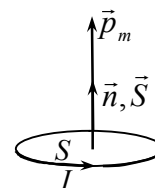


Рис.20

Момент сил, действующий на контур с током в магнитном поле. По определению, результирующий момент амперных сил $\vec{N} = \oint [\vec{r}, d\vec{F}]$, где $d\vec{F}$ определяется формулой (61). Расчет, подробности которого мы опустим, приводит к легко запоминающемуся результату:

$$\vec{N} = [\vec{p}_m, \vec{B}]. \quad (64)$$

Из (64) видно, что вектор $\vec{N}$ перпендикулярен как вектору $\vec{p}_m$, так и вектору $\vec{B}$, а его модуль равен $N = p_m B \sin \alpha$, где α - угол между векторами $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$. Когда $\vec{p}_m \uparrow \uparrow \vec{B}$, момент сил $\vec{N} = 0$ и положение контура будет устойчивым. Если $\vec{p}_m \uparrow \downarrow \vec{B}$, момент сил тоже равен нулю, но положение контура будет неустойчивым. Во внешнем неоднородном поле элементарный контур с током будет поворачиваться к положению устойчивого равновесия (при котором $\vec{p}_m \uparrow \uparrow \vec{B}$) и втягиваться в область поля с большей магнитной индукцией $\vec{B}$.

Работа при перемещении контура с током. Покажем, что при перемещении элементарного контура с током в магнитном поле силы Ампера совершают работу

$$\delta A = I d\Phi, \quad (65)$$

где $d\Phi$ - приращение магнитного потока сквозь контур. Рассмотрим сначала частный случай: контур с подвижной перемычкой длины l находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном плоскости рисунка 21. Согласно (61) на перемычку действует сила Ампера $F = IBl$. При перемещении вправо на dx эта сила совершает положительную работу

$$\delta A = Fdx = IBldx = IBdS, \quad (66)$$

где dS – приращение площади, ограниченной контуром. Магнитный поток считается $\Phi > 0$, если нормаль к площади контура образует с направлением тока в нем правовинтовую систему, как на рис.21. Полученное выражение справедливо при любом направлении вектора $\vec{B}$. Действительно, разложим этот вектор на три составляющие: $\vec{B} = \vec{B}_n + \vec{B}_l + \vec{B}_x$. Составляющая $\vec{B}_l$ параллельна то-

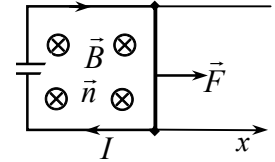


Рис.21

ку, поэтому соответствующая сила Ампера равна нулю; составляющая $\vec{B}_x$ дает силу, перпендикулярную перемещению, поэтому работы она не совершает. Остается только $\vec{B}_n$, ее и следует подставить в (65) в случае произвольного направления вектора $\vec{B}$. Но $B_n dS = d\Phi$ в любом случае, и мы опять приходим к формуле (65). Перейдем теперь к рассмотрению любого контура при произвольном его перемещении в стационарном неоднородном магнитном поле. Разобьем мысленно этот контур на бесконечно малые элементы тока и рассмотрим их бесконечно малые перемещения, в пределах которых поле можно считать однородным. Сложив элементарные работы для всех элементов, мы вновь придем к (65). Чтобы получить полную работу при перемещении из положения 1 в положение 2 достаточно проинтегрировать:

$$A = \int_1^2 Id\Phi. \quad (67)$$

При постоянном токе $A = I(\Phi_2 - \Phi_1)$, где Φ_2 и Φ_1 - магнитные потоки сквозь контур в конечном и начальном положениях.

Лекции 6 -7. Электрическое поле в веществе

Диэлектриками (или изоляторами) называются вещества практически не проводящие электрический ток. Это значит, что в диэлектриках нет свободных (сторонних) зарядов.

Поляризация диэлектриков. Под действием внешнего электрического поля заряды, входящие в состав молекул диэлектрика (их называют связанными), могут смещаться только на небольшие расстояния. Если диэлектрик состоит из неполярных молекул, то в пределах каждой молекулы происходит смещение зарядов – положительных по полю, отрицательных – против поля. Если диэлектрик состоит из полярных молекул, то дипольные моменты ориентируются преимущественно в направлении внешнего поля. **Результат упорядочивания молекулярных диполей под действием внешнего электрического поля называется поляризацией диэлектрика.**

Поместим в электрическое поле плоского конденсатора металлическую пластинку (рис.22). Свободные электроны соберутся вблизи положительно заряженной пластины, а вблизи отрицательной пластины выступит положительный заряд. Электроны будут двигаться до тех пор, пока результирующее поле $\vec{E}$ не станет равным нулю: $\vec{E} = \vec{E}_o + \vec{E}' = 0$, где $\vec{E}_o$ - поле в отсут-

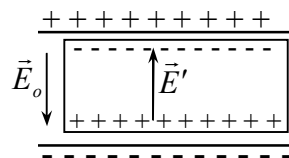


Рис.22

ствии пластинки, $\vec{E}'$ - поле зарядов пластинки. Если образец – диэлектрик, то картина будет другой (рис.23). В этом случае $\vec{E}'$ - поле связанных зарядов, возникшее вследствие поляризации. Это поле также направлено против внешнего поля $\vec{E}_o$, однако уже не может быть равным ему, поскольку связанные заряды ограничены в свободе перемещения

$$\vec{E} = \vec{E}_o + \vec{E}' \neq 0. \quad (68)$$

Для однородно поляризованного диэлектрика результирующее поле $\vec{E}$ и выступивший на поверхности связанный заряд можно подсчитать. В объеме вблизи любого положительного заряда найдется равный ему отрицательный (рис.23),

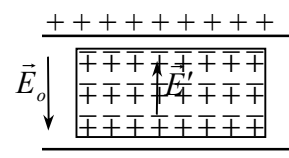


Рис.23

поэтому не скомпенсированный связанный заряд выступит только на поверхности образца, образуя подобие

плоского конденсатора (12). Поэтому модули векторов в (68) соответственно равны $E_o = \sigma/\varepsilon_o$, $E' = \sigma'/\varepsilon_o$, где σ и σ' поверхностные плотности свободных зарядов пластин и поверхностных связанных зарядов диэлектрика соответственно. С учетом этого в проекциях на направление $\vec{E}_o$ уравнение (68) будет выглядеть так

$$E = \sigma/\varepsilon_o - \sigma'/\varepsilon_o, \Rightarrow E = \frac{\sigma - \sigma'}{\varepsilon_o}. \quad (69)$$

Таким образом, поле в диэлектрике ослабляется: $E < E_o$ в некоторое ε раз. Следовательно, $E = \frac{E_o}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_o}$, $\Rightarrow \sigma = \varepsilon\varepsilon_o E \rightarrow (69)$, откуда находим связь σ' и поля

E в диэлектрике:

$$\sigma' = (\varepsilon - 1)\varepsilon_o E. \quad (70)$$

Величина $\varepsilon = \frac{E_o}{E} > 1$ называется диэлектрической проницаемостью и показывает, во сколько раз ослабляется поле в диэлектрике по сравнению с внешним полем. Введем диэлектрическую восприимчивость: $\varkappa \equiv \varepsilon - 1$, тогда связь σ' и E можно выразить еще одним способом:

$$\sigma' = \varkappa\varepsilon_o E. \quad (71)$$

Отсюда видно, что **поверхностная плотность связанного заряда, выступившего на поверхности однородно поляризованного диэлектрика, пропорциональна результирующему полю в диэлектрике.**

Вектор поляризованности $\vec{P}$. Если внешнее поле или диэлектрик неоднородны, поляризация оказывается различной в разных местах диэлектрика. Чтобы охарактеризовать поляризованность в данной точке, выделяют физически бесконечно малый объем диэлектрика ΔV , содержащий эту точку, находят

векторную сумму дипольных моментов молекул в этом объеме, и определяют вектор поляризованности $\vec{P}$ следующим образом:

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}. \quad (72)$$

Вектор поляризованности имеет смысл дипольного момента единицы объема диэлектрика. Нетрудно сообразить, что вектор поляризованности $\vec{P}$ может быть выражен через концентрацию:

$$\vec{P} = n \langle \vec{p} \rangle, \quad (73)$$

где $\langle \vec{p} \rangle = \sum \vec{p}_i / \Delta N$ - средний дипольный момент отдельной молекулы, ΔN - полное число молекул в объеме ΔV .

В случае неоднородно поляризованного диэлектрика, внутри появится нескомпенсированный связанный заряд с объемной плотностью ρ' . Выделим малый объем внутри диэлектрика ΔV . При поляризации входящий в ΔV положительный заряд $\rho'_+ \Delta V$ сместится относительно отрицательного заряда на величину $\vec{l}$, в результате чего будет приобретен дипольный момент $\Delta \vec{p} = \rho'_+ \Delta V \vec{l}$. Разделив на ΔV , получим еще одно выражение для вектора поляризованности

$$\vec{P} = \rho'_+ \vec{l}. \quad (74)$$

Связь между векторами поляризованности $\vec{P}$ и напряженности $\vec{E}$.

Если диэлектрик изотропный и $\vec{E}$ не слишком велико, то из опыта следует, что вектор $\vec{P}$ линейно зависит от $\vec{E}$:

$$\vec{P} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}. \quad (75)$$

Теорема Гаусса для вектора $\vec{P}$. Поток вектора $\vec{P}$ сквозь произвольную замкнутую поверхность равен минус избыточному связанному заряду диэлектрика внутри этой поверхности

$$\oint (\vec{P}, d\vec{S}) = -q'_{\text{внут}}. \quad (76)$$

Доказательство. Пусть замкнутая поверхность S охватывает часть диэлектрика (заштрихован на рис.24, слева). При включении поля вследствие поляризации заряд проходит через элемент dS этой поверхности (на рис.24 справа – увеличенный фрагмент). Пусть смещение положи-

тельного заряда характеризуется вектором $\vec{l}_+$, а отрицательного – вектором $\vec{l}_-$. Через dS наружу выйдет положительный заряд $\rho'_+ l_+ dS \cos \alpha$ из

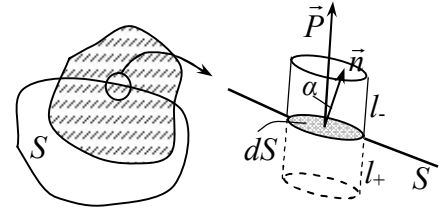


Рис.24

внутренней (пунктирной) части косоуго цилиндра, а внутрь войдет отрицательный заряд $\rho'_- l_- dS \cos \alpha$ из внешней части цилиндра, что эквивалентно переносу положительного заряда в обратном направлении. Значит, суммарный связанный заряд, выходящий наружу через dS , равен

$$dq' = \rho'_+ l_+ dS \cos \alpha + |\rho'_-| l_- dS \cos \alpha = \rho'_+ (l_+ + l_-) dS \cos \alpha = \rho'_+ l dS \cos \alpha,$$

где $l = l_+ + l_-$ расстояние, на которое сместились друг относительно друга центры масс положительных и отрицательных зарядов при поляризации. Согласно (74) $\vec{P} = \rho'_+ \vec{l}$, $\Rightarrow dq' = P dS \cos \alpha = (\vec{P}, d\vec{S})$. Проинтегрировав это выражение,

найдем весь заряд, который вышел из объема внутри замкнутой поверхности S при поляризации. Внутри останется избыточный заряд - $q'_{\text{внут}}$

противоположного знака, $\Rightarrow$ получим выражение (76): $\oint (\vec{P}, d\vec{S}) = -q'_{\text{внут}}$, что и требовалось доказать.

Теорема Гаусса для поля вектора $\vec{D}$. Поскольку источниками электрического поля являются любые заряды, а именно: связанные и сторонние (т.е. не входящие в состав молекул диэлектрика, мы их обозначали просто q), то тео-

рему Гаусса для вектора $\vec{E}$ можно переписать так $\oint_S (\varepsilon_o \vec{E}, d\vec{S}) = (q + q')_{\text{внут}}$. Подставим $q'_{\text{внут}}$ из (74): $q'_{\text{внут}} = -\oint_S (\vec{P}, d\vec{S})$, $\Rightarrow$

$$\oint_S (\varepsilon_o \vec{E}, d\vec{S}) = q_{\text{внут}} - \oint_S (\vec{P}, d\vec{S}).$$

Перенесем второй интеграл влево и запишем под одним знаком:

$$\oint_S (\varepsilon_o \vec{E}, d\vec{S}) + \oint_S (\vec{P}, d\vec{S}) = q_{\text{внут}}, \Rightarrow \oint_S ((\varepsilon_o \vec{E} + \vec{P}), d\vec{S}) = q_{\text{внут}}.$$

Вспомогательный вектор во внутренних круглых скобках обозначают

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_o \vec{E} + \vec{P}. \quad (77)$$

и называют **электрическим смещением**. Тогда для него можно компактно сформулировать теорему Гаусса:

$$\oint_S (\vec{D}, d\vec{S}) = q_{\text{внут}}. \quad (78)$$

Поток вектора $\vec{D}$ сквозь любую замкнутую поверхность равен суммарному стороннему заряду внутри этой поверхности.

Связь между векторами $\vec{E}$ и $\vec{D}$. Подставив выражение (75), верное только для изотропных диэлектриков: $\vec{P} = \alpha \varepsilon_o \vec{E} \rightarrow (77)$, получим $\vec{D} = \varepsilon_o (1 + \alpha) \vec{E}$, или

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_o \vec{E}, \quad (79)$$

где диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = \alpha + 1$. Для всех веществ $\varepsilon > 1$, а для вакуума $\varepsilon = 1$. Из (79) следует, что векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$ направлены одинаково. Поскольку источниками вектора $\vec{D}$ являются только сторонние заряды, линии вектора $\vec{D}$ проходят области с диэлектриком, не прерываясь. Это позволяет выбрать правильную тактику при решении задач: сначала найти вектор $\vec{D}$, а за-

тем, используя (79), вычислить вектор $\vec{E}$ (ибо расположение сторонних зарядов обычно известно, а распределение связанного заряда представляет весьма сложную задачу).

Энергия электрического поля. Рассмотрим процесс зарядки конденсатора (рис.27). Пусть верхняя пластина заряжена зарядом $+q$ до потенциала φ_1 , а нижняя – зарядом $-q$ до потенциала φ_2 .

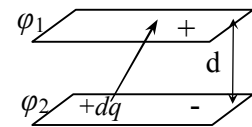


Рис.27

Работа против сил поля при переносе очередной порции заряда $+dq > 0$ с нижней пластины на верхнюю идет на увеличение энергии взаимодействия зарядов: $dW = -dA =$

$dq(\varphi_1 - \varphi_2) = dqU$. Выразим напряжение через емкость конденсатора

$$(C = \frac{q}{U}): U = \frac{q}{C}, \Rightarrow dW = \frac{q dq}{C}. \text{ Далее интегрируем: } W = \int_0^q \frac{q dq}{C} = \frac{q^2}{2C} = \frac{U^2 C}{2}.$$

Емкость плоского конденсатора $C = \frac{\epsilon \epsilon_0 S}{d}$, где S – площадь каждой из пластин,

d – расстояние между ними, $\Rightarrow W = \frac{q^2 d}{2 \epsilon \epsilon_0 S}$. Умножим числитель и знаменатель

на S и учтем, что $\frac{q}{S} = \sigma$ и $Sd = V$ (объем пространства между пластинами), $\Rightarrow$

$$W = \frac{q^2 V}{S^2 2 \epsilon \epsilon_0} = \frac{\sigma^2 V}{2 \epsilon \epsilon_0}. \text{ Теперь умножим числитель и знаменатель на } \epsilon \epsilon_0 \text{ и учтем,}$$

что $\epsilon \epsilon_0 E = \sigma$, $\Rightarrow$ энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2} V. \quad (80)$$

Отношение W/V является энергией единицы объема и называется **плотностью энергии электрического поля**

$$w_E = \frac{\epsilon \epsilon_0 E^2}{2}. \quad (81)$$

Учтем, что $\vec{D} \equiv \varepsilon_o \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \varepsilon_o \vec{E}$ (см. 77 и 79), $\Rightarrow \varepsilon \varepsilon_o \vec{E} = \varepsilon_o \vec{E} + \vec{P}$. Умножим это равенство скалярно на вектор $\vec{E}$, $\Rightarrow \varepsilon \varepsilon_o E^2 = \varepsilon_o E^2 + (\vec{P}, \vec{E}) \rightarrow (81), \Rightarrow$

$$w_E = \frac{\varepsilon_o E^2}{2} + \frac{(\vec{P}, \vec{E})}{2}. \quad (82)$$

Полученное выражение представляет собой сумму плотности электрической энергии в вакууме и плотности энергии поляризации диэлектрика. Следовательно, электрическая энергия локализована в самом поле: как там, где есть вещество, так и там, где его нет. Однако стационарное поле может существовать только в присутствии порождающих его зарядов, а вот переменные поля могут существовать и самостоятельно.

Лекция 8. Магнитное поле в веществе

Поле в магнетике. Всякое вещество является магнетиком, т.е. способно намагничиваться -приобретать магнитный момент. Если внести магнетик в магнитное поле с индукцией $\vec{B}_o$, то результирующее поле $\vec{B}$ будет векторной суммой вектора $\vec{B}_o$ и собственного поля магнетика $\vec{B}'$:

$$\vec{B} = \vec{B}_o + \vec{B}'. \quad (83)$$

Вектор $\vec{B}'$ не имеет специальных источников, поэтому для поля $\vec{B}$ в магнетике справедлива **теорема Гаусса: Поток вектора $\vec{B}$ сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю:**

$$\oint_S (\vec{B}, d\vec{S}) = 0. \quad (84)$$

Это значит, что линии вектора $\vec{B}$ и при наличии вещества остаются непрерывными. Природа магнитных свойств вещества может быть полностью обоснова-

на методами квантовой механики, а в электродинамике можно ограничиться следующими модельными представлениями. Молекулы многих веществ обладают магнитными моментами, обусловленными движением заряженных частиц внутри молекул.

В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты молекул ориентированы беспорядочно, поэтому результирующее поле внутри магнетика равно нулю. Если при отсутствии внешнего поля молекулы не обладают магнитными моментами, то внесении поле в молекулах возникают индуцированные круговые токи, в результате чего сами молекулы и вместе с ними и все вещество приобретает магнитный момент и соответствующее собственное поле магнетика $\vec{B}'$. Большинство магнетиков намагничиваются слабо. Сильными магнитными свойствами обладают только железо, никель, кобальт и многие их сплавы.

Намагниченность – это магнитный момент единицы объема магнетика

$$\vec{J} = \frac{\sum \vec{p}_m}{\Delta V}, \quad (85)$$

где суммирование происходит по всем молекулам в физически малом объеме ΔV . Намагниченность можно определить как $\vec{J} = n \langle \vec{p}_m \rangle$.

Если во всех точках вещества вектор $\vec{J}$ одинаков, то вещество намагничено однородно.

Токи намагничивания I' . Пусть каждая молекула представляет собой некоторый микроскопический молекулярный круговой ток. Возникновение ориентации магнитных моментов этих токов в поле приводит к появлению макроскопических токов – токов намагничивания I' . Обычные токи, связанные с перемещением заряженных частиц вдоль проводника будем называть токами проводимости I . Механизм появления токов намагничивания I' можно понять из следующего примера. Пусть имеется цилиндр из однородного магнетика, намагниченность которого $\vec{J}$ направлена вдоль оси (рис.28). Молекулярные токи в дан-

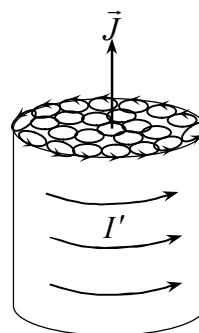


Рис.28

ном случае направлены против часовой стрелки и их магнитные моменты образуют вектор $\vec{J}$. Внутри образца молекулярные токи в местах их соприкосновения текут в противоположных направлениях и поэтому компенсируют друг друга.

Некомпенсированными остаются только те молекулярные токи, которые выходят на боковую поверхность цилиндра. Суммируясь, они создают макроскопический поверхностный ток намагничивания I' .

Циркуляция вектора $\vec{J}$. Докажем, что циркуляция намагниченности $\vec{J}$ по произвольному контуру Γ равна алгебраической сумме токов намагничивания I'

$$\oint_{\Gamma} (\vec{J}, d\vec{l}) = I', \quad (86)$$

где $I' = \int (\vec{j}', d\vec{l})$, причем интегрирование производится по любой поверхности S , ограниченной контуром Γ . Из рисунка 29 видно, что одни молекулярные токи пересекают поверхность дважды – в противоположных

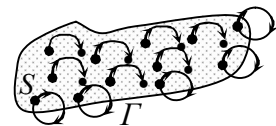


Рис.29

направлениях, $\Rightarrow$ они не вносят вклад в сумму токов намагничивания через поверхность S . Другие токи – те, которые нанизаны на контур Γ , пересекают поверхность S только один раз. Именно они и создают поверхностный ток намагничивания I' . Пусть каждый молекулярный ток равен i и охватывает площадь s . Элемент $d\vec{l}$ контура Γ обвивают те молекулярные токи, центры которых попадают внутрь косоугольного цилиндра с объемом

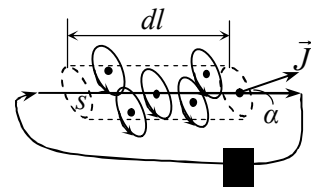


Рис.30

$dV = s \cos \alpha dl$ (рис.30), где α – угол между $d\vec{l}$ и $\vec{J}$.

Вклад этих молекулярных токов в ток намагничивания $dI' = n dV$, где n – концентрация молекул. Подставляя объем, получим $dI' = n s \cos \alpha dl$. Так как магнитный момент отдельного молекулярного тока $p_m = is$, а $n \vec{p}_m = \vec{J}$, то

$dI' = (\vec{J}, d\vec{l})$. Интегрируя по Γ , получим (86), что и требовалось доказать.

Теорема и циркуляции вектора $\vec{H}$ (для магнитного поля постоянных токов). В магнетиках циркуляция вектора $\vec{B}$ будет определяться не только токами проводимости, но и токами намагничивания:

$$\oint (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_o (I + I'). \quad (87)$$

Так как определение токов намагничивания I' сложная задача, удобно ввести вспомогательный вектор $\vec{H}$, циркуляция которого будет определяться только токами проводимости внутри контура Γ . Согласно (86) циркуляция вектора $\vec{J}$ равна сумме токов намагничивания $\oint_{\Gamma} (\vec{J}, d\vec{l}) = I' \rightarrow (87), \Rightarrow$

$$\oint_{\Gamma} (\vec{B}, d\vec{l}) = \mu_o (I + \oint_{\Gamma} (\vec{J}, d\vec{l})), \Rightarrow$$

$$\oint_{\Gamma} \left(\left(\frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{J} \right), d\vec{l} \right) = \mu_o I, \quad (88)$$

где циркуляция вспомогательного вектора $\vec{H} = \left(\frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{J} \right)$ определяется только

токами проводимости I . Вектор $\vec{H}$ называется напряженностью магнитного поля. Итак,

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{J}, \Rightarrow \quad (89)$$

теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$ выглядит так. **Циркуляция вектора $\vec{H}$ по произвольному замкнутому контуру Γ равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром:**

$$\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{l}) = I. \quad (90)$$

Связь между векторами $\vec{J}$ и $\vec{H}$. Для некоторых магнетиков зависимость между векторами $\vec{J}$ и $\vec{H}$ имеет линейный характер:

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (91)$$

где χ - **магнитная восприимчивость**.

Магнитная восприимчивость χ может быть больше и меньше нуля.

В соответствии с этим магнетики разделяют на **парамагнетики** ($\chi > 0$, $\vec{J} \uparrow \uparrow \vec{H}$) и **диамагнетики** ($\chi < 0$, $\vec{J} \uparrow \downarrow \vec{H}$). У **ферромагнетиков** зависимость $\vec{J}(\vec{H})$ имеет нелинейный характер, и зависит от предыстории образца.

Связь между векторами $\vec{B}$ и $\vec{H}$. Подставим (91) $\rightarrow$ (89), $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H}, \Rightarrow (1 + \chi) \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}, \\ \Rightarrow \vec{B} &= \mu \mu_0 \vec{H}, \end{aligned} \quad (92)$$

где μ - магнитная проницаемость среды, которая определяется через χ следующим образом:

$$\mu = 1 + \chi. \quad (93)$$

У парамагнетиков $\mu > 1$, у диамагнетиков $\mu < 1$, причем в обоих случаях мало отличается от 1, поэтому эти магнетики являются слабыми.

Природа диа-, пара- и ферромагнетизма. В грубом приближении электрон в атоме движется по орбите, подобно волчку. В этом случае возникает прецессия орбиты – вращение вектора $\vec{p}_m$ вокруг вектора $\vec{B}$. Расчет показывает, что для однородного внешнего магнитного поля угловая скорость прецессии одинакова для всех электронов. Вследствие этого возникает дополнительный индуцированный дипольный момент $\vec{p}'_m \sim \vec{B}$, что и является причиной диамагнетизма. Если бы атомы обладали собственными магнитными моментами, то они ориентировались бы под действием поля, что приводило бы к появлению

магнитного момента $\vec{p}_m \gg \vec{p}'_m$. Поэтому диамагнитными свойствами обладают атомы, не имеющие собственного магнитного момента.

У парамагнетиков магнитный момент молекул $\vec{p}_m \neq 0$, поэтому в магнитном поле они выстраиваются параллельно вектору $\vec{B}$ (и $\vec{H}$). Тепловое

движение препятствует этой ориентации, в результате возникает некоторая преимущественная ориентация. Экспериментально установленный **закон Кюри** показывает, что **магнитная восприимчивость парамагнетиков обратно пропорциональна абсолютной температуре**

$$\chi \approx \frac{C}{T},$$

где C – **постоянная Кюри**, зависящая от структуры вещества.

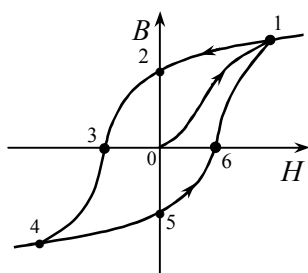


Рис.31

Из-за нелинейности зависимости $\vec{J}(\vec{H})$ у **ферро-**
магнетиков формально вводят $\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = f(H)$, причем μ имеет физический смысл только для первоначального намагничивания (участок 0→1 на рис.31). Максимальное значение μ у ферромагнетиков может быть очень велико, например, у железа $\mu \sim 5000$.

Зависимость $B(H)$ называется **петлей гистерезиса**. При первоначальном увеличении H индукция магнитного поля B возрастает до некоторой величины (0→1). При последующем уменьшении H до нуля (1→2) индукция B не падает до 0; величина этой **остаточной индукции** B_2 (0→2) соответствует **остаточному намагничиванию** ферромагнетика и объясняет существование постоянных магнитов. Увеличение H в противоположном направлении (2→3) приводит к полному размагничиванию при напряженности H_3 , называемой **коэрцитивной силой**, а затем и к перемагничиванию (3→4), т.е. переориентации магнитных моментов в противоположном направлении. При последующем уменьшении H

кривая идет по пути 4→5. При $H=0$ (в точке 5) $B \neq 0$. Уменьшение B до нуля происходит при повторном изменении направления и возрастании H (5→6). Намагничивание на пути 6→1 отличается от первоначального (0→1) и указывает на неоднозначность зависимости $\vec{B}(\vec{H})$.

Ферромагнетизм нельзя объяснить в рамках классической электродинамики. В ферромагнетике действуют межатомные силы, имеющие квантовую природу, которые ориентируют спиновые моменты электронов в атомах параллельно друг другу. Области с параллельно направленными моментами называются *доменами* (размер $\sim 10^{-4}$ см). Во внешнем магнитном поле магнитные моменты доменов ориентируются по полю, значительно увеличивая магнитную индукцию в ферромагнетике. При снятии внешнего поля не все домены разориентируются, поэтому для ферромагнитных материалов характерно сохранение остаточной намагниченности.

Лекция 9. Электромагнитная индукция

Закон электромагнитной индукции. Правило Ленца. В 1831 году Фарадей открыл явление электромагнитной индукции: в замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока (т.е. потока вектора $\vec{B}$), охватываемого этим контуром, возникает электрический ток, называемый индукционным.

Появление индукционного тока означает, что при изменении магнитного потока в контуре возникает эдс индукции $\mathcal{E}_i$. Направление индукционного тока в контуре подчиняется следующему **правилу Ленца: индукционный ток направлен так, чтобы противодействовать своим магнитным полем вызывающей его причине.**

Математическая формулировка **закона электромагнитной индукции Фарадея-Ленца:**

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (97)$$

При изменении потока магнитной индукции через замкнутый контур в последнем возникает эдс индукции, пропорциональная скорости изменения магнитного потока через поверхность, ограниченную этим контуром. Минус в (97) связан с правилом Ленца: если поток растет, то магнитное поле индукционного тока направлено так, чтобы суммарный поток уменьшался, а если поток уменьшается, то - чтобы увеличивался.

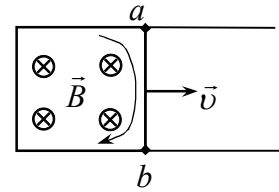


Рис.34

Закон электромагнитной индукции является одним из постулатов электродинамики. Однако можно понять природу этого явления из следующего примера. Пусть тонкий проводящий контур с подвижной перемычкой ab длины l помещен в магнитное поле, направленное перпендикулярно рис. 34, от нас. Начнем двигать перемычку (вместе со всеми её свободными электронами) вправо со скоростью $\vec{v}$. В результате на каждый электрон начнет действовать магнитная сила Лоренца $\vec{F} = -e[\vec{v}, \vec{B}]$, направленная вниз вдоль перемычки – потечет ток формально направленный вверх (за направление плотности тока принимается скорость направленного движения *положительных* зарядов, что эквивалентно движению *электронов* в противоположном направлении). В данном случае сила Лоренца играет роль сторонней силы электрического поля с напряженностью $E^* = [\vec{v}, \vec{B}]$. По определению (37) циркуляция поля E^* дает величину эдс индукции $\mathcal{E}_i$, в данном случае

$$\mathcal{E}_i = -vBl. \quad (98)$$

Минус – так как при данном направлении вектора $\vec{B}$ положительное направление обхода контура по часовой стрелке. Произведение $v l$ есть приращение площади контура в единицу времени ($\frac{dS}{dt}$), поэтому $vBl = B dS/dt = d\Phi/dt$, где $d\Phi > 0$ – приращение магнитного потока сквозь площадь контура. Таким образом,

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Явление самоиндукции. Индуктивность. Явление электромагнитной индукции возникает в замкнутом проводящем контуре независимо от того, чем вызвано изменение магнитного потока. В частности, изменение магнитного потока может быть вызвано изменением тока в этом же контуре. В этом случае явление называют *самоиндукцией*, а соответствующую величину $\mathcal{E}_s$ – эдс самоиндукции. Если в пространстве, где находится контур с током I , нет ферромагнетиков, то в соответствии с законом Био-Саварра поле вектора $\vec{B}$, а следовательно, и полный магнитный поток Φ будут пропорциональны силе тока

$$\Phi = LI, \quad (99)$$

где L – коэффициент, называемый *индуктивностью* контура.

Индуктивность L зависит от формы и размеров контура, а также от магнитных свойств окружающей среды. Если контур жесткий и вблизи нет ферромагнетиков, индуктивность является величиной постоянной.

Если в проводящем контуре изменяется ток, то по закону электромагнитной индукции в нем возникает эдс самоиндукции

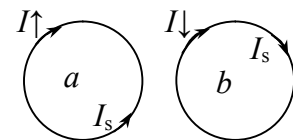


Рис.35

$$\mathcal{E}_s = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{dLI}{dt} = - \left(L \frac{dI}{dt} + I \frac{dL}{dt} \right).$$

Если индуктивность L постоянна для данного контура, второе слагаемое в скобках равно нулю, и тогда

$$\mathcal{E}_s = - L \frac{dI}{dt}, \quad (100)$$

где минус обусловлен правилом Ленца: если основной ток I в контуре

возрастает, то индукционный направлен в противоположную сторону (рис.35 а). Если основной ток I в контуре убывает, то индукционный направлен в ту же сторону (рис.35 б).

Индуктивность соленоида. При прохождении тока I по длинному соленоиду, внутри которого находится магнетик с магнитной проницаемостью μ , в последнем возникает магнитное поле (60), равное $B = \mu_0 \mu n I$. Пусть соленоид имеет площадь поперечного сечения S и полное число витков N . Тогда поток сквозь каждый виток $\Phi = BS$, а полный поток, сцепленный с соленоидом,

$$N\Phi = NBS = N\mu_0 \mu n IS.$$

Так как $N = nl$, где n - число витков на единицу длины, l - длина соленоида, то $N\Phi = \mu_0 \mu n^2 ISl = \mu_0 \mu n^2 IV$ ($V = lS$ - объем соленоида).

Следовательно, индуктивность соленоида, согласно ее определению (99) равна

$$L = \mu_0 \mu n^2 V.$$

Энергия магнитного поля. Замкнем цепь, содержащую индуктивность L и сопротивление R на источник с эдс $\mathcal{E}_o$. В контуре начнет возрастать ток, что приведет к появлению эдс самоиндукции $\mathcal{E}_s$. По закону Ома $RI = \mathcal{E}_o + \mathcal{E}_s \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_o = RI - \mathcal{E}_s}$. Источник с эдс $\mathcal{E}_o$ за время dt совершит работу $\mathcal{E}_o Idt$. Умножим выражение в рамке на Idt

$$\mathcal{E}_o Idt = RI^2 dt - \mathcal{E}_s Idt.$$

Выражение $RI^2 dt = \delta Q$ это джоулева теплота, а последнее слагаемое ($-\mathcal{E}_s Idt = Id\Phi$), так как по закону электромаг-

нитной индукции $\mathcal{E}_s = -\frac{d\Phi}{dt}$. Из этого следует, что работа,

которую совершает источник, больше, чем выделяющаяся теплота. Часть

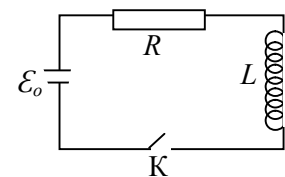


Рис.36

этой работы ($Id\Phi$) совершается против эдс самоиндукции и идет на увеличение энергии магнитного поля катушки индуктивности (соленоида). Так как $d\Phi = LdI$, $\Rightarrow$

$$W = \int_0^I LIdI = \frac{LI^2}{2}. \quad (106)$$

Поскольку индуктивность соленоида $L = \mu\mu_o n^2 V$, а индукция его магнитного поля $B = \mu\mu_o nI$, то энергию магнитного поля можно выразить как

$$W = \frac{\mu\mu_o n^2 I^2 V}{2} = \frac{BVnI}{2} = \frac{BHV}{2}. \quad (107)$$

Мы учли, что $\vec{B} = \mu\mu_o \vec{H}$ (92), или, в данном случае однородного поля соленоида $H = nI$. Энергия единицы объема (т.е. **плотность энергии магнитного поля**, w_B) равна

$$w_B = \frac{W}{V} = \frac{BH}{2}. \quad (108)$$

Для неоднородного магнитного поля плотность энергии $w_B = \frac{dW}{dV}$, кроме того, расчет показывает, что выражение (108) верно и в векторном виде:

$$w_B = \frac{(\vec{B}, \vec{H})}{2} = \frac{\mu\mu_o H^2}{2}. \quad (109)$$

Лекция 10. Уравнения Максвелла

Ток смещения. Максвелл выдвинул идею: поскольку меняющееся во времени магнитное поле ($\partial\vec{B}/\partial t$) создает электрическое поле в соответствии с открытием Фарадея, то следует ожидать, что меняющееся во времени электрическое поле ($\partial\vec{E}/\partial t$) будет порождать магнитное поле. К этой идее можно

прийти путем, например, следующих рассуждений. Выразим в теореме о циркуляции вектора $\vec{H}$ (90) ток как поток вектора плотности тока (36):

$$\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{l}) = \int_S (\vec{j}, d\vec{S}). \quad (110)$$

Применим эту теорему к случаю, когда предварительно заряженный плоский конденсатор разряжается через некоторое внешнее сопротивление (рис.37). В качестве контура Γ возьмем периметр квадрата S , перпендикулярного проводу. Достроим квадрат до куба,

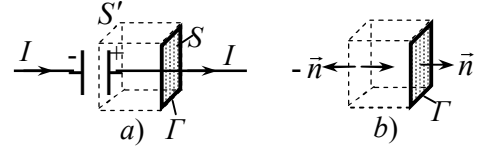


Рис.37

так, чтобы грань параллельная S проходила внутри конденсатора. Пусть поверхность S' состоит из суммы всех граней куба, кроме грани S . Поверхности S и S' имеют одну границу - контур Γ . Однако через поверхность S течет ток I , а через поверхность S' не течет никакого тока. Получается, что в (110) справа интеграл через поверхность S' равен нулю, а через поверхность S - току I . Т.е. теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$ выполняется не для любой поверхности, ограниченной контуром Γ , охватывающим ток. Чтобы избежать этой неприятности, заметим, что сквозь поверхность S' проходит только электрическое поле (через ту ее часть, которая находится внутри конденсатора). Продифференцируем теорему Гаусса для вектора электрического смещения (78) по времени:

$$\oint \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, d\vec{S} \right) = \frac{\partial q}{\partial t}.$$

С другой стороны, согласно уравнению непрерывности

$$\oint (\vec{j}, d\vec{S}) = -\frac{\partial q}{\partial t}.$$

Сложив два последних уравнения, получим

$$\oint \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0. \quad (111)$$

В этом выражении плотность тока проводимости складывается с производной по времени от вектора $\vec{D}$, которую Максвелл назвал плотностью тока смещения

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (112)$$

Сумму тока смещения и тока проводимости называют полным током, Плотность полного тока равна

$$\vec{j}_{полн} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (113)$$

Таким образом, линии плотности тока проводимости замыкаются линиями плотности тока смещения. Покажем, что введение полного тока устраняет описанную выше «неприятность». Введем в правую часть (110) полный ток

$$I_{полн} = \int \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}. \quad (114)$$

Покажем, что полный ток будет одинаков для поверхностей S и S' . Применим уравнение (111) к замкнутой поверхности $S + S'$ (полной поверхности куба на рис.37), с учетом того, что для замкнутой поверхности положительная нормаль направлена везде наружу

$$I_{полн}(S) - I_{полн}(S') = 0. \quad (115)$$

Знак минус появился из-за того, что нормали $(-\vec{n})$ для S' и $\vec{n}$ для S (рис.37, b) направлены в противоположные стороны. Отсюда следует, что

$$I_{полн}(S) = I_{полн}(S'), \quad (116)$$

что и требовалось доказать. Именно таким образом теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$, сформулированную ранее для постоянных токов, следует обобщить для произвольного случая и записать

$$\oint_{\Gamma} (\vec{H}, d\vec{l}) = \int_S \left((\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}), d\vec{S} \right). \quad (117)$$

В таком виде теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$ справедлива всегда, о чем свидетельствуют результаты эксперимента во всех без исключения случаях.

Несколько замечаний о токе смещения. Ток смещения эквивалентен току проводимости только в отношении способности создавать магнитное поле. Токи смещения существуют там, где меняется со временем электрическое поле.

Система уравнений Максвелла в интегральной форме. Открытие тока смещения позволило Максвеллу создать единую теорию электрических и магнитных явлений. Оказалось, что все разрозненные явления электричества можно представить в виде четырех фундаментальных уравнений:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad \oint_l (\vec{E}, d\vec{l}) &= - \int_s \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S} \right) & \text{(III)} \quad \oint_l (\vec{H}, d\vec{l}) &= \int_s \left((\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}), d\vec{S} \right) \\ \text{(II)} \quad \oint_s (\vec{B}, d\vec{S}) &= 0 & \text{(IV)} \quad \oint_s (\vec{D}, d\vec{S}) &= \int_v \rho dV, \end{aligned}$$

где ρ – объемная плотность сторонних зарядов, $\vec{j}$ – плотность тока проводимости. Физический смысл этих уравнений сводится к следующему.

I. Циркуляция вектора $\vec{E}$ по любому замкнутому контуру равна со знаком минус производной по времени от магнитного потока через любую поверхность, ограниченную данным контуром. При этом под $\vec{E}$ понимается не только вихревое электрическое поле, но и электростатическое, циркуляция которого равна нулю.

II. Поток вектора $\vec{B}$ через любую замкнутую поверхность всегда равен нулю.

III. Циркуляция вектора $\vec{H}$ по любому замкнутому контуру равна полному току через произвольную поверхность, ограниченную данным контуром.

IV. Поток вектора $\vec{D}$ через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме сторонних зарядов, находящихся внутри этой поверхности.

Из уравнений Максвелла следует, что электрические и магнитные поля нельзя рассматривать как независимые: изменение во времени одного из этих полей приводит к появлению другого. Так классическая электродинамика приводит к идее единого электромагнитного поля.

Если поля стационарны ($\vec{E} = \text{const}$, $\vec{B} = \text{const}$), то уравнения Максвелла распадаются на две группы независимых уравнений, описывающих электрическое и магнитное поля, существующие независимо друг от друга:

$$(I) \oint_l (\vec{E}, d\vec{l}) = 0$$

$$(III) \oint_l (\vec{H}, d\vec{l}) = \int_s (\vec{j}, d\vec{S})$$

$$(II) \oint_s (\vec{B}, d\vec{S}) = 0$$

$$(IV) \oint_s (\vec{D}, d\vec{S}) = \int_v \rho dV,$$

В таком случае можно изучать электрическое и магнитное поля по отдельности.

В общем случае уравнения Максвелла невозможно вывести. Правильнее их рассматривать как оптимальный набор постулатов, концентрирующих в себе содержание классической электродинамики.

Материальные уравнения. Четыре уравнения Максвелла не являются полной системой уравнений. Для нахождения полей по заданным распределениям токов и зарядов необходимо их дополнить так называемыми материальными уравнениями, характеризующими свойства среды. Для изотропных сред, без сегнетоэлектриков и ферромагнетиков, и притом не слишком больших электромагнитных полей, материальные уравнения нам уже знакомы:

$$\vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}, \quad \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*).$$

В остальных случаях описание среды значительно сложнее.

Лекция 12. Электромагнитные волны

Волновое уравнение для электромагнитной волны. Рассмотрим

нейтральную непроводящую среду с проницаемостями ε и μ , где $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ и $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ (54). Поскольку в данном случае плотности токов и зарядов равны нулю ($\rho=0, j=0$), уравнения Максвелла в дифференциальной форме будут иметь вид

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{I}) \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{II})$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{III}) \qquad \nabla \cdot \vec{D} = 0 \quad (\text{IV}).$$

Путем достаточно сложных математических выкладок из указанных уравнений можно получить (здесь вывод не приводится):

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (55)$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (56)$$

Множитель при второй производной по времени определяет скорость распространения волны

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}, \quad (57)$$

что для вакуума ($\varepsilon=1, \mu=1$) дает удивительный результат: скорость волны равна скорости света

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}. \quad (58)$$

Таким образом, свет является электромагнитной волной. И наоборот, переменное электромагнитное поле в вакууме распространяется со скоростью света, независимо от своей частоты! Рассмотрим простейшую электромагнитную волну.

Плоская электромагнитная волна. Пусть плоская волна распространяется вдоль оси x . Поскольку волновые поверхности будут в этом случае перпендикулярны оси x , то векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$, а $\Rightarrow$ и их проекции на оси y и z не будут зависеть от y и z (иначе волна не могла бы распространяться строго в направлении оси x). Следовательно, в уравнениях I-IV производные по y и z будут равны нулю и уравнения упрощаются. Можно показать, что вторые производные от E_y по времени и координате связаны волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad (60)$$

и аналогично можно получить волновое уравнение для H_z

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \quad (61)$$

Ранее из уравнений Максвелла были получены волновые уравнения (55,56) в более общем случае, что позволяет уравнения (60,61) написать для любой проекции. Но тогда мы потеряли бы информацию о геометрии волны.

Как связаны мгновенные значения $\vec{E}$ и $\vec{H}$? Пусть $E_y = E_y(t-x/c)$, $H_z = H_z(t-x/c)$. Обозначим фазу $\varphi \equiv (t-x/c)$ и вычислим производные: от E_y по координате x ; от H_z по времени:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial \varphi} \left(-\frac{1}{c} \right) = \left(-\frac{1}{c} \right) \frac{\partial E_y}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \cdot 1 = \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}.$$

Подставим эти производные в первое из уравнений (59)

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial \varphi} = -\mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}, \Rightarrow \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial \varphi} = \mu \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}, \Rightarrow \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{\partial E_y}{\partial \varphi} = \sqrt{\mu \mu_0} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}, \Rightarrow$$

$$\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} E_y = \sqrt{\mu \mu_0} H_z + const,$$

где константа обусловлена наличием постоянной компоненты полей. Нас интересует только переменное поле, для которого положим $const=0$, $\Rightarrow$

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} E_y = \sqrt{\mu\mu_0} H_z, \quad (62)$$

это означает, что **векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ изменяются синфазно, в частности,**

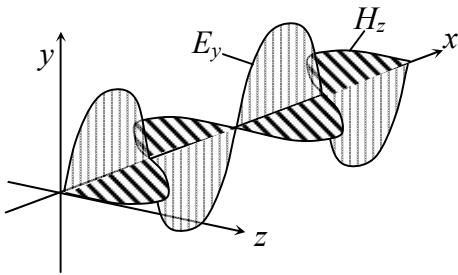


Рис.14

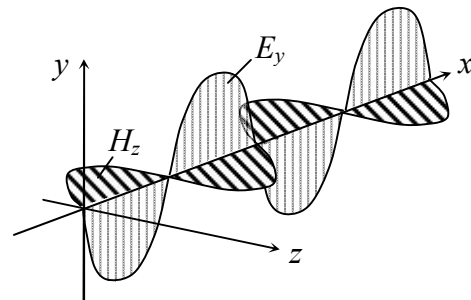


Рис.15

одновременно обращаются в нуль и достигают максимумов/минимумов.

Кроме того, эти векторы составляют правовинтовую систему с направлением распространения (рис.14). По этим свойствам и направлению распространения волны можно однозначно определить в каких именно плоскостях колеблются векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ ($\vec{E}$ - в плоскости xy ; $\vec{H}$ - в плоскости xz), поэтому уравнения плоской электромагнитной волны принято записывать без указания проекций:

$$E=E_m \cos(\omega t-kx); \quad H=H_m \cos(\omega t-kx). \quad (63)$$

Обратите внимание! На рис.14 изображена электромагнитная волна: векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в каждой точке оси x **в некоторый момент времени!** Через время, равное половине периода колебаний картина изменится (рис.15). Вообще картина непрерывно изменяется не только в пространстве, но и во времени!

Обратите внимание сейчас, что изображенные на рис. 14 и 15 мгновенные фотографии волны позволяют наглядно увидеть, что вектор $\vec{E}$ в процессе распро-

странения волны все время колеблется в *плоскости* xy ! Поэтому данная волна называется *плоско-поляризованной*!

Энергия электромагнитной волны. В сущности, - это энергия электромагнитного поля. Плотность этой энергии мы получили, когда изучали электродинамику

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} \quad (63)$$

Выражение (63) имеет место для изотропной среды, в которой мы получили соотношение (62), $\Rightarrow$ плотность электрической энергии в этой волне равна плотности магнитной энергии. Это позволяет выразить w несколькими способами:

$$w = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0} EH = \frac{EH}{v} \quad (64)$$

Умножив w на v , получим плотность потока энергии: $\Pi = wv = EH$, что с учетом ортогональности векторов $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{v}$ можно записать в виде векторного произведения

$$\vec{\Pi} = [\vec{E} \times \vec{H}] \quad (65)$$

Вектор $\vec{\Pi}$ называется вектором Пойнтинга. Подставим E из (63) в (64):

$w = \varepsilon\varepsilon_0 E_m^2 \cos^2(\omega t - kx)$, $\Rightarrow \Pi = wv = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 / \mu\mu_0} E_m^2 \cos^2(\omega t - kx)$. По определению, интенсивность такой волны равна среднему значению плотности потока энергии (и учитывая, что $\langle \cos^2 \rangle = 1/2$), получим

$$I = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 / \mu\mu_0} E_m^2 / 2 \quad (66)$$

Этот результат исключительно важен: **интенсивность электромагнитной волны пропорциональна квадрату амплитуды вектора $\vec{E}$.**

$$I \sim E_m^2 \quad (67)$$

Импульс электромагнитной волны. Давление света. Пусть электромагнитная волна падает нормально на плоскую площадку S). В данном случае

полезно вспомнить, что свет не только волна, но и поток фотонов, имеющих нулевую массу покоя. Согласно теории относительности импульс (который мы обозначим K , чтобы не путать с давлением) объекта с нулевой массой покоя, движущегося со скоростью света и имеющий энергию W равен $K = \frac{W}{c}$. Разде-

лим обе части на объем, $\Rightarrow \frac{K}{V} = \frac{w}{c}$, где w – плотность энергии. Вычислим импульс, сообщаемый поверхности за время dt . Выделим вплотную к поверхности слой толщиной cdt , $\Rightarrow$ объем выделенного слоя $dV = Scdt$. Все фотоны, находящиеся в dV за время dt успеют достичь поверхности и передать ей свой импульс

dK : $dK = \frac{w}{c} S \cdot cdt$. Но по второму закону Ньютона $\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}$, $\Rightarrow$

$$\frac{dK}{dt} = F = \frac{w}{c} S \cdot c, \Rightarrow \frac{F}{S} \equiv p = w.$$

Таким образом, мы получили результат: **давление электромагнитной волны равно объемной плотности энергии этой волны**

$$p = w. \quad (68)$$

На самом деле эта величина пульсирует с очень большой частотой, поэтому практический интерес представляет ее среднее значение, $\Rightarrow p = \langle w \rangle$. Для идеально отражающей поверхности это давление будет в два раза больше (ср.: импульс, переданный стенке при абсолютно упругом ударе шарика в два раза больше, чем при абсолютно неупругом). Следует еще добавить, что световое давление очень мало ($\sim 10^{-5} \text{ Па}$), по сравнению с атмосферным ($\sim 10^5 \text{ Па}$).

Лекция 13. Волновая оптика

Различают несколько видов электромагнитных волн: радиоволны, оптический диапазон, рентгеновское и гамма-излучения. Волновая оптика занимает-

ся главным образом оптическим диапазоном, который подразделяется (по длинам волн в вакууме) на

ультрафиолетовое излучение..... $\lambda = 0,01 \div 0,4$ мкм;

видимое излучение..... $\lambda = 0,4 \div 0,76$ мкм;

инфракрасное излучение..... $\lambda = 0,76 \div 1$ мм.

Показатель преломления. Поскольку почти все эффекты взаимодействия света с веществом связаны с электрической компонентой электромагнитных волн, принято называть вектор $\vec{E}$ световым вектором и обсуждать главным образом его. **Показателем преломления n среды** называется отношение

$$n = \frac{c}{v}, \quad (70)$$

где v - скорость света в среде. С учетом выражений (57 и 58) показатель преломления n можно выразить через μ и ε среды: $n = \sqrt{\mu\varepsilon}$. В оптическом диапазоне большинство материалов, прозрачных для электромагнитных волн, имеют $\mu=1$, $\Rightarrow$ можно считать, что $\boxed{n = \sqrt{\varepsilon}}$. Среду с большим n называют **оптически более плотной**. В веществе длина волны меняется по сравнению с λ_0 в вакууме: $\lambda = v/v = c/nv = \lambda_0/n$, $\Rightarrow$ в среде с показателем преломления n длина волны равна

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}. \quad (71)$$

Интенсивность волны. Интенсивность I – это модуль среднего по времени значения плотности потока энергии. Плотность потока электромагнитной энергии определяется вектором Пойнтинга, $\Rightarrow$

$I = \langle \Pi \rangle \sim E_m H_m \sim E_m \sqrt{\varepsilon} E_m \sim n E_m^2$. Поэтому

$$\boxed{I \sim n E_m^2}. \quad (72)$$

Интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды светового вектора!

Как устроен свет? Кажется бы, дикий вопрос после того, как мы столько раз повторили, что свет – это электромагнитная волна. Это правда, но не вся. **Естественный свет** испускается атомами нагретого вещества. Излучение отдельного атома происходит в случайном направлении, продолжается приблизительно 10^{-8} с и представляет собой **цуг** волн протяженностью около 3 м. Направление колебаний в каждом цуге случайно. Одновременно излучают множество атомов, соответствующие цуги, накладываясь друг на друга, образуют испускаемую телом волну. Поэтому в результирующей световой волне колебания светового вектора происходят в любых направлениях с равной вероятностью. При прохождении световой волны через некоторую точку направления и фазы светового вектора быстро и беспорядочно сменяют друг друга. Например, если волна проходит перпендикулярно листу (рис.16), то в течение достаточно-го (очень малого) времени (в центре картинке) в плоскости листа будут зафиксированы все возможные направления светового вектора.

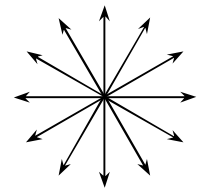


Рис.16

Электромагнитная волна на границе раздела диэлектриков. Пусть плоская электромагнитная волна падает вдоль оси x на границу раздела (плоскость yz – тонирована на рис.17) однородных изотропных диэлектриков с магнитной проницаемостью $\mu=1$. При этом возникает отраженная и преломленная волны. Обозначим электрическую составляющую падающей, отраженной и преломленной волн вблизи поверхности раздела соответственно $\vec{E}$, $\vec{E}'$, $\vec{E}''$. На рис.17 в среде 1 изображены векторы $\vec{E}$ и $\vec{E}'$, а в среде 2, за

поверхностью – вектор $\vec{E}''$ преломленной волны. Очевидно, отраженная волна пойдет в отрицательном направлении оси x , а преломленная в положительном. В плоской электромагнитной волне её электрическая и магнитная

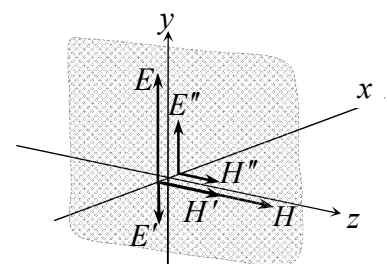


Рис.17

компоненты существуют в виде векторов $\vec{E}_y$ и $\vec{H}_z \perp ox$ и параллельных (=тангенциальных) поверхности yz . Поскольку тангенциальные компоненты векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ сохраняются при переходе границы раздела диэлектриков (мы это доказывали в курсе электродинамики), то алгебраическая сумма проекций E_y в среде 1 должна быть равна алгебраической сумме проекций E_y в среде 2 (и то же самое у проекций H_z):

$$E_y + E'_y = E''_y \quad (73)$$

$$H_z + H'_z = H''_z \quad (74)$$

Из (62) $\Rightarrow$ что $H_z \sim \sqrt{\varepsilon} E_y = n_1 E_y$; аналогично $H''_z \sim \sqrt{\varepsilon} E''_y = n_2 E''_y$.

NB! Обратите внимание на расположение векторов отраженных волн (с одним штрихом): $\vec{E}'$ направлен в отрицательном направлении oy , а $\vec{H}'$ в положительном oz . Значит, их проекции на эти оси будут иметь разные знаки.

Наблюдательный студент спросил бы, - а почему Вы направили вектор $\vec{H}' \parallel \vec{H}$ в отраженной волне? А потому, что направление распространения с векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в любой плоской электромагнитной волне должны составлять **правовинтовую** систему векторов, в том числе и в отраженной. Тогда еще более наблюдательный студент спросил бы, - а почему вектор $\vec{E}'$ направлен в отрицательном направлении oy ? А ни почему - бывает и так и так. Теперь стоит вернуться к началу раздела "волновая оптика" и вспомнить, как показатель преломления связан с ε .

Итак, (см. строку перед **NB.**) знаки проекций H'_z и E'_y должны быть противоположными, поэтому

$H'_z \sim -n_1 E'_y$, и (74) можно переписать так: $n_1 E_y - n_1 E'_y = n_2 E''_y$, или

$E_y - E'_y = \frac{n_2}{n_1} E''_y$. Решив это уравнение совместно с (73), найдем E'_y и E''_y через

E_y и запишем результат в векторной форме:

$$\vec{E}' = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \cdot \vec{E}; \quad \vec{E}'' = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \cdot \vec{E}. \quad (75)$$

Отсюда следуют выводы, к которым мы будем не раз обращаться:

1. Векторы $\vec{E}''$ и $\vec{E}$ всегда направлены одинаково, $\Rightarrow$ **при прохождении через границу фаза не меняется.**

2. Вектор $\vec{E}'$ однонаправлен с $\vec{E}$ только если $n_1 > n_2$, т.е. при переходе волны в оптически менее плотную среду. Если $n_1 < n_2$, $\Rightarrow$ числитель первой дроби будет < 0 , $\Rightarrow$ направления векторов $\vec{E}'$ и $\vec{E}$ противоположны, $\Rightarrow$ эти векторы совершают колебания в противофазе. Это значит, что **при отражении от оптически более плотной среды ее фаза меняется скачком на π .**

Коэффициенты отражения и пропускания. Пусть световая волна падает нормально на границу раздела однородных изотропных прозрачных диэлектриков. Коэффициент отражения ρ по определению есть отношение интенсивностей отраженной и падающей волн: $\rho = \frac{I'}{I} = \frac{n_1 E_m'^2}{n_1 E_m^2} = \frac{E_m'^2}{E_m^2}$ (см.(72)). Последнее отношение легко выразить из первой формулы (75)

$$\rho = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2. \quad (76)$$

Коэффициент пропускания τ найдем аналогично. По определению $\tau = \frac{I''}{I}$. С

учетом (72) получим $\tau = \frac{n_2 E_m'^2}{n_1 E_m^2}$, и окончательно (см. вторую формулу из (75))

$$\tau = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}. \quad (77)$$

Легко видеть, что $\rho + \tau = 1$, потому что "ничего не исчезает бесследно": падающая волна разделяется на две: отраженную и преломленную и больше никуда. Вычислим ρ при нормальном падении света из воздуха ($n_1=1$) на стекло ($n_2=1,5$), - получится 0,04, $\Rightarrow$ отражается около 4 % света.

Геометрическая оптика. Считается, что Вы ее прошли в школе. Поэтому перечислим основные результаты. Основу геометрической оптики составляют три закона:

1. В однородной среде свет распространяется прямолинейно.
2. Угол отражения α' равен углу падения α и оба луча лежат в одной плоскости (она называется плоскостью падения) с нормалью к поверхности раздела.
3. Закон преломления света (закон Снелла): отношение синуса угла падения к синусу угла преломления β равен отношению показателей преломления сред:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (78)$$

NB! Все углы отсчитываются не от поверхности раздела, а от перпендикуляра к ней, проведенного из точки падения!

Принцип Ферма. Рассмотрим путь $1 \rightarrow 2$, который проходит луч света в неоднородной среде. Участок пути ds свет проходит за время $dt = ds/v$, где v - скорость света в данном месте среды. Так как $v = c/n$, то $dt = nds/c$, и время τ прохождения всего пути $1 \rightarrow 2$ равно

$$\tau = \frac{1}{c} \int_1^2 nds = \frac{L}{c}, \quad (79)$$

где величина $L = \int_1^2 n ds$ называется **оптической длиной пути**.

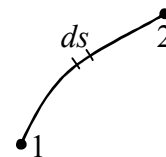


Рис.18

В однородной среде $L=ns$, где s – геометрический путь. Из (79) следует, что время распространения света на пути s в среде со скоростью v равно времени распространения света в вакууме на пути L со скоростью c .

Принцип Ферма утверждает: **свет распространяется по такому пути, оптическая длина которого минимальна**. Можно показать, что из принципа Ферма следуют все три закона геометрической оптики.

Интерференция света

Когерентность. Рассмотрим с помощью векторной диаграммы суперпозицию двух однонаправленных гармонических волн одинаковой частоты с амплитудами A_1 и A_2 (рис.19). Если разность фаз между ними δ , то результирующую амплитуду A можно найти с помощью теоремы косинусов:

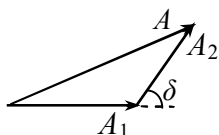


Рис.19

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta . \quad (80)$$

Если разность фаз δ изменяется во времени, то такие волны называют **некогерентными**. Если δ изменяется случайным образом, то среднее по времени значение $\langle \cos \delta \rangle = 0$, поэтому $A^2 = A_1^2 + A_2^2, \Rightarrow I = I_1 + I_2, \Rightarrow$ в данном случае интенсивность результирующего колебания равна сумме интенсивностей, создаваемых каждой из волн в отдельности. Поэтому в результате во всех точках пространства интенсивность одинакова.

Если разность фаз δ постоянна во времени, то такие волны называют **когерентными**. При наложении когерентных волн, как следует из (80) результирующая интенсивность равна

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \cos \delta . \quad (81)$$

Эта интенсивность зависит от **интерференционного** слагаемого $2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta$. В точках, где $\cos \delta > 0$, результирующая интенсивность $I > I_1 + I_2$; а там, где $\cos \delta < 0$, интенсивность $I < I_1 + I_2$. Таким

образом, **при наложении когерентных волн в пространстве происходит перераспределение интенсивности: в одних местах возникают максимумы, в других – минимумы. Это явление называют интерференцией волн.** Если амплитуды

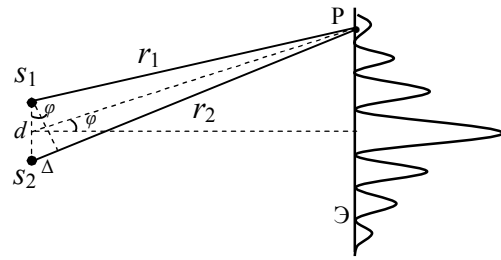


Рис.20

складываемых волн одинаковы ($\Rightarrow$ одинаковы интенсивности), то интерференционная картина особенно контрастна: в максимумах наблюдается $I = 4I_1 = 4I_2$, а в минимумах $I = 0$.

Свет, испущенный обычными источниками, можно рассматривать как хаотическую последовательность отдельных цугов (длительностью порядка $10^{-8}c$) синусоидальных волн. При наложении света от разных источников фазовые соотношения между цугами быстро изменяются случайным образом, $\Rightarrow$ эти источники в принципе не являются когерентными. Тем не менее, интерференционную картину можно получить и от обычных источников. Для этого волну, излучаемую одним источником света, разделяют на части, которые затем накладывают друг на друга. Если разность хода этих волн от точки испускания до точки наблюдения не превышает некоторой характерной длины (ее называют **длиной когерентности**), то случайные изменения амплитуды и фазы в частях волны происходят согласованно и какое-то (короткое) время части волны пребывают в состоянии когерентности и возникает интерференционная картина. Такие периоды когерентности следуют один за другим и картина интерференции существует стабильно в пространстве.

Независимо от способа разделения, способные интерферировать части волны можно для упрощения представлять исходящими из двух точечных ко-

герентных источников S_1 и S_2 (рис.20). В области перекрывания этих двух волн (она называется зоной интерференции) будет возникать система максимумов и минимумов освещенности, которую можно наблюдать на экране Э. Пусть разность расстояний r_1 и r_2 от источников до точки Р экрана равна $\Delta = r_2 - r_1$ (её называют **разностью хода**). Если разность хода равна целому числу длин волн, то колебания, пришедшие в точку Р от обеих волн, будут происходить в одной фазе. Это и есть **условие возникновения максимумов** в точке Р:

$$\Delta = m\lambda, \quad \text{где } m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (82)$$

Чтобы в точке Р оказался минимум, Δ должно быть равно полуцелому числу длин волн, чтобы в точку Р волны приходили в противофазе, $\Rightarrow$ **условие возникновения минимумов** в точке Р:

$$\Delta = \frac{2m+1}{2}\lambda, \quad \text{где } m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (83)$$

Если волны от источников S_1 и S_2 распространяются не в вакууме, а в среде с показателем преломления n , то время прохождения (а следовательно и число периодов) волны в среде будет таким же, как в вакууме на пути равном оптической длине, т.е. вместо Δ следует взять **оптическую разность хода**, равную $n(r_2 - r_1)$. Поэтому условия (82,83) в среде будут соответственно для максимумов $n\Delta = m\lambda$, где $m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$; для минимумов $n\Delta = \frac{2m+1}{2}\lambda$, где $m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Интерференция при отражении от тонких пластинок. Пусть в точку А на поверхность тонкой плоско-параллельной пластинки падает луч света (рис.21). В результате отражений от обеих поверхностей пластинки исходная волна разделится на две (лучи 1 и 2). Если пластинка прозрачна, то

амплитуды волн 1 и 2 мало отличаются друг от друга, что важно для получения достаточно четкой картины интерференции. Оптическая разность хода лучей 1

и 2 равна $\Delta = n(AB + BC) - AD$, где n - показатель преломления вещества пластинки. Так как $AB = BC = \frac{2b}{\cos \beta}$; $AD = 2b \tan \beta \cdot \sin \alpha$, то

$$\Delta = 2nbc \cos \beta. \quad (84)$$

При отражении от верхней поверхности пластинки (от оптически более плотной среды) происходит скачок фазы отраженной волны на π , что соответствует потере полуволны $\lambda/2$, и учитывая, что $\sin \alpha = n \sin \beta$ (3-й закон геометрической оптики), получим

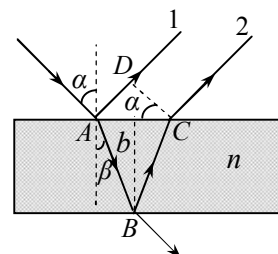


Рис.21

$$\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2}. \quad (85)$$

Если волны 1 и 2 когерентны между собой (не вдаваясь в подробности, можно считать, что это так), то условием максимумов будет: $\Delta = m\lambda$, где $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3$, или

$$2b\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \frac{\lambda}{2} = m\lambda. \quad (86)$$

Меняя угол падения, мы будем наблюдать последовательную смену максимумов и минимумов отражения.

Лекция 14. Дифракция света. Поляризация волн

Под дифракцией понимают круг явлений, связанный с отклонением от прямолинейного распространения света. Дифракция возникает, если появляется преграда, закрывающая часть световой волны. Тогда на экране за преградой возникнет дифракционная картина в виде чередования областей минимумов и максимумов освещенности. Решение задач дифракции с помощью

уравнений Максвелла натывается на значительные математические трудности. Для весьма широкого круга задач пригоден значительно более простой и наглядный приближенный метод, основанный на принципе Гюйгенса-Френеля.

Принцип Гюйгенса-Френеля. Рассмотрим непрозрачную преграду N с отверстием произвольной формы, через которое проходит свет от точечного монохроматического источника C (рис.22). Определим

напряженность электрической компоненты световой волны в произвольной точке P за преградой. Перекроем мысленно отверстие в преграде произвольной поверхностью S и разобьем ее на элементарные участки dS .

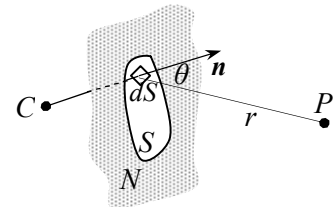


Рис.22

Френель предложил считать каждый такой элементарный участок источником вторичной сферической волны. Достигнув точки P , амплитуда этой волны будет пропорциональна амплитуде первичной волны и самой dS , и обратно пропорциональна расстоянию r от dS до P . В результате точки P достигнет колебание электрического вектора, величина которого меняется по закону

$$dE = K \frac{a_o dS}{r} \cos(\omega t - kr), \quad (87)$$

где коэффициент K зависит от угла θ между нормалью к dS и направлением на точку P . Логично допустить, что коэффициент K монотонно убывает по мере увеличения θ . Результирующее колебание в точке P равно

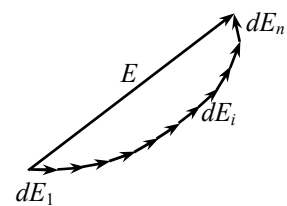


Рис.23

$$E = \int_S K(\Theta) \frac{a_o dS}{r} \cos(\omega t - kr). \quad (88)$$

Мы получили математическую формулировку принципа **Гюйгенса-Френеля**. Суть его в следующем: для определения электрической компоненты световой

волны в точке P , лежащей за некоторой поверхностью S , являющейся источником вторичных волн, необходимо найти колебания, приходящие в эту точку от всех элементов dS этой поверхности, а затем сложить их с учетом амплитуд и фаз при помощи векторной диаграммы (рис.23). На этой диаграмме результирующая амплитуда $\vec{E}$ = сумме амплитуд $d\vec{E}_i$.

Разобьем волновую поверхность на кольцевые зоны таким образом, чтобы расстояние от внешней границы очередной зоны до точки P отличалось на $\lambda/2$ (рис.24). Нетрудно сообразить, что внешний радиус m -й зоны равен

Рис.24

Если на отверстие падает плоская волна, то

Площади зон $\Delta S = \pi(r_m^2 - r_{m-1}^2) = \pi\lambda \frac{ab}{|a-b|}$, т.е. практически одинаковы. Однако амплитуды колебаний, приходящих в точку P , по мере увеличения m монотонно и очень медленно убывают из-за увеличения расстояния r_m и роста угла θ . Фазы колебаний, возбуждаемых в точке P соседними зонами, отличаются на π , поэтому векторы амплитуд нечетных зон противоположны векторам-амплитудам от четных зон. Если число зон нечетное, то в точке P наблюдается максимум, если число зон четное, то – минимум.

Амплитуду результирующего колебания можно получить графически, как

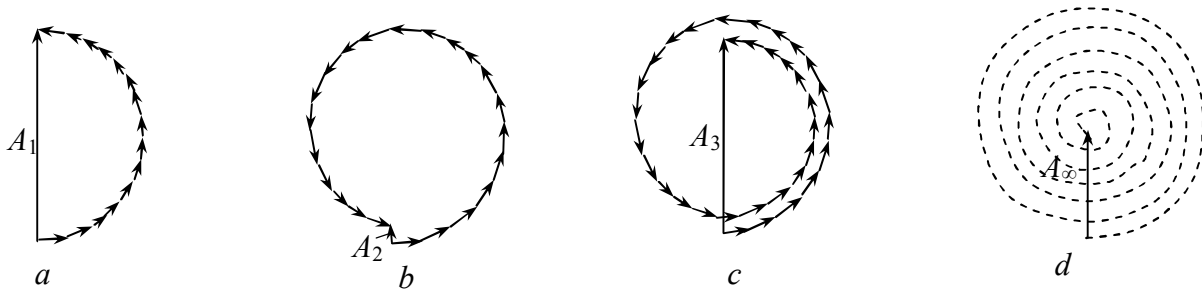


Рис.25

мы указывали выше: каждую зону и всю поверхность делят на весьма узкие (дифференциально узкие подзоны площадью dS). Тогда результат действия 1-й зоны Френеля можно изобразить диаграммой (рис.25a), которая соответствует сдвигу фаз на π в пределах от центра до внешней границы зоны и дает максимально возможную амплитуду A_1 . Результат действия первых двух зон (рис.25b) дает амплитуду A_2 , близкую к нулю; трех зон - A_3 (рис.25c), чуть меньшую максимальной и так далее. Амплитуда A_∞ при всех открытых зонах составляет половину A_1 . Поэтому интенсивность в точке P в этом случае парадоксальным образом оказывается в 4 раза меньше, чем при открытой только первой зоне (напомним: интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды). Отсюда следует объяснение наблюдаемой на экране за отверстием картины чередования темных и светлых полос.

Дифракция от щели. Пусть на щель ширины b падает нормально плоская световая волна (рис.26). Разобьем щель на зоны в виде узких полосок одинаковой ширины параллельных краям. Амплитуды колебаний, приходящих в точку P от каждой зоны,

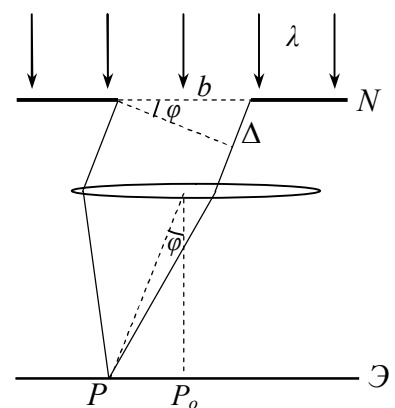


Рис.26

имеют одинаковую амплитуду dA , поскольку распространяются параллельно друг другу перед линзой (на прохождение внутри линзы все параллельные

лучи тратят одинаковое время). Разность фаз между соседними зонами будет одинаковой. Следовательно, на векторной диаграмме будут суммироваться одинаковые по модулю векторы $d\vec{A}_i$, повернутые друг относительно друга на один и тот же угол. Если разность хода лучей составляет $\Delta=\lambda$, то их разность фаз $\delta=2\pi$ и амплитуда результирующего колебания обращается в нуль. Это первый минимум дифракционной картины, представляющей собой симметричную относительно середины систему чередующихся светлых и темных полос, параллельных щели. Результирующая амплитуда обращается в нуль и тогда, когда разность хода Δ равна целому числу длин волн. Поскольку $\Delta=b\sin\varphi$ (рис.26), то окончательно, условием дифракционных **минимумов** будет

$$b\sin\varphi = \pm m\lambda, \text{ где } m=1,2,3\dots \quad (91)$$

При $m=0$ (в точке экрана напротив центра щели) наблюдается максимум, так как в этом случае разность фаз $\delta=0$. Качественно картина распределения интенсивности на экране представлена на рис. 27.

Дифракционная решетка является спектральным прибором, служащим для разложения света в спектр. Она представляет собой стеклянную или металлическую пластинку, на которой нанесено очень много (до 10^5) прямых равноотстоящих штрихов. Рассмотрим идеальную решетку, состоящую из одинаковых равноотстоящих щелей. Пусть ширина каждой щели равна b , а период решетки d ($d=a+b$), где a расстояние между щелями. Пусть на решетку падает нор-

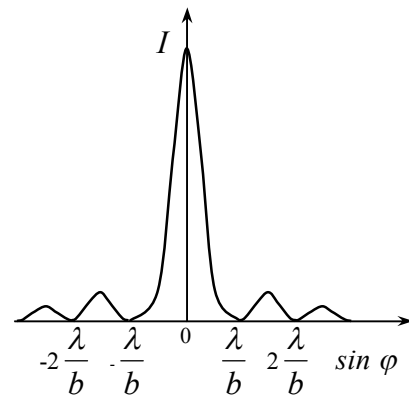


Рис.27

мально плоская монохроматическая световая волна (рис.28). Каждая из щелей давала бы картину, показанную на рис. 27. И такие картины в отсутствие

когерентности точно накладывались бы друг на друга, независимо от их положения. Интенсивности при этом складывались бы, и мы получили бы от N щелей дифракционную картину как от одной щели, но усиленную в N раз.

При освещении решетки когерентным светом, световые волны от всех щелей интерферируют друг с другом, и дифракционная картина резко меняется (рис.28 а). Мы будем наблюдать систему достаточно узких максимумов. Поэтому, строго говоря, картина является дифракционно-интерференционной. Рассмотрим главные максимумы. В середину дифракционной картины когерентные колебания от всех щелей приходят в фазе. Это значит, что если амплитуда от одной щели равна A_1 , а число щелей N , то результирующая амплитуда A и соответствующая ей интенсивность I будут определяться формулами

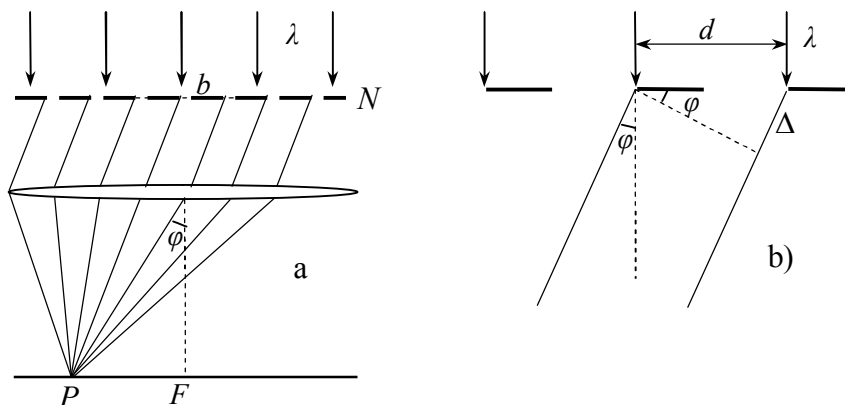


Рис.28

$$A = A_1 N, \quad I = I_1 N^2. \quad (92)$$

Такой же результат (рис.28 б) получается и для углов дифракции φ , для которых оптическая разность хода Δ колебаний от соседних щелей равна целому числу длин волн:

$$d \sin \varphi_m = \pm m \lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (93)$$

где знаки « $\pm$ » следуют из симметрии дифракционной картины относительно

нормали к решетке. Справедливости ради, следует сказать, что имеют место еще и максимумы не «главные», но их интенсивности значительно меньше, кроме того, используются дополнительные меры для их подавления. В эти специальные вопросы мы вдаваться не будем. Формулу (93) называют формулой дифракционной решетки.

Поляризация света

Волну, в которой направление колебаний светового вектора $\vec{E}$ упорядочено каким-либо образом, называют поляризованной. Если эти колебания происходят только в одной плоскости, проходящей через луч, то волна называется плоско- (или линейно-) поляризованной. Плоскость, в которой колеблется вектор $\vec{E}$ называется плоскостью поляризации. В естественном свете колебания вектора $\vec{E}$ в любой фиксированной точке среды происходят в разных направлениях, быстро и беспорядочно сменяя друг друга. Естественный свет можно представить в любой плоскости, перпендикулярной направлению распространения в виде суммы двух волн с взаимно перпендикулярными плоскостями поляризации.

Поляризаторы. Так называются приборы, которые свободно пропускают колебания светового вектора, параллельные плоскости, которую мы будем называть плоскостью пропускания поляризатора. Колебания, перпендикулярные этой плоскости полностью задерживаются.

Степень поляризации. Когда плоскость пропускания поляризатора параллельна направлению максимального значения вектора $\vec{E}$, наблюдается максимальная интенсивность пропускания поляризатора, а когда перпендикулярна — минимальная интенсивность пропускания поляризатора. Измеряя эти интенсивности, можно судить о качестве (степени) поляризации частично-поляризованного света. Частично-поляризованный свет характеризуют степенью поляризации P , которую определяют как

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{I_{\text{пол}}}{I_o}. \quad (94)$$

Здесь $I_{\text{пол}}$ - интенсивность поляризованной составляющей, I_o - полная интенсивность: $I_o = I_{\max} + I_{\min}$. Для плоско поляризованного света $P=1$, для естественного $P=0$.

Закон Малюса. Поляризаторы можно использовать и в качестве анализаторов – для определения степени поляризации света. Пусть на анализатор перпендикулярно листу падает линейно-поляризованный свет, световой вектор $\vec{E}_o$ которого составляет угол φ с плоскостью пропускания P (рис.29). Анализатор пропускает только ту составляющую вектора $\vec{E}_o$, которая параллельна плоскости пропускания P , $\Rightarrow E = E_o \cos \varphi$. Следовательно, интенсивность пропорциональна квадрату E , $\Rightarrow$

$$I = I_o \cos^2 \varphi. \quad (95)$$

Это и есть закон Малюса, где I_o – интенсивность падающего плоскополяризованного света. Пусть на систему из двух поляризаторов, плоскости пропускания которых повернуты относительно друг друга угол φ , падает естественный свет интенсивности I_o . После прохождения первого поляризатора интенсивность уменьшится вдвое из-за равной вероятности любых направлений светового вектора в падающей волне. Таким образом, на второй поляризатор упадет плоскополяризованный свет с интенсивностью $I_o / 2$. Вторым поляриза-

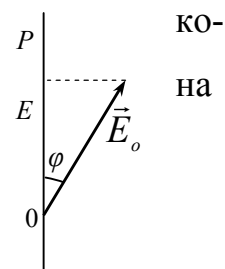


Рис.29

тор согласно закону Малюса пропустит $I = \frac{I_o}{2} \cos^2 \varphi$. **Поляризация при**

отражении и преломлении. Закон Брюстера. Если угол падения естественного света на границу раздела двух прозрачных диэлектриков отличен от нуля, то отраженный и преломленный пучки оказываются частично-поляризованными.

В отраженном свете преобладают колебания вектора $\vec{E}$, перпендикулярные к плоскости падения, в преломленном свете – параллельные плоскости падения. Степень поляризации обеих волн зависит от угла падения.

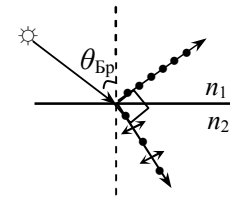


Рис.30

При некотором значении угла падения отраженный свет становится полностью поляризованным, а его плоскость поляризации перпендикулярной к плоскости падения. Этот угол называется углом Брюстера $\theta_{Бр}$ и подчиняется **закону Брюстера**:

$$\operatorname{tg} \theta_{Бр} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (96)$$

Угол Брюстера $\theta_{Бр}$ является углом полной поляризации. На рис. 30 на отраженном и преломленном лучах показаны направления колебаний вектора $\vec{E}$. Легко убедиться, что отраженный и преломленный лучи составляют прямой угол, если угол падения = $\theta_{Бр}$. Для этого достаточно решить совместно (96) и закон Снелла (78). Степень поляризации преломленной волны при падении под углом Брюстера $\theta_{Бр}$ достигает максимального значения, однако эта волна остается лишь частично-поляризованной.

В типичных условиях (например, на границе стекло-воздух) большая часть интенсивности приходится на преломленную волну. Можно повысить степень ее поляризации, последовательно пропуская свет через несколько одинаковых параллельных друг другу пластинок, установленных под углом Брюстера. При достаточно большом числе пластин прошедший свет будет практически полностью линейно поляризованным, а его интенсивность будет равна половине интенсивности падающего света.

Лекция 1. Тепловое излучение

Абсолютно черное тело. Электромагнитное излучение, возникающее за счет внутренней энергии нагретых тел, называется тепловым. Пусть излучающее тело, находится в замкнутой полости с идеально отражающими стенками (рис. 1). Выделим мысленно внутри полости площадку. При **равновесном излуче-**

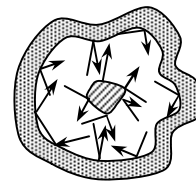


Рис.1

нии количество лучистой энергии, проходящей в 1 с через площадку в одном направлении, равно энергии, проходящей через эту же площадку в обратном направлении. Тепловое излучение описывается распределением энергии по спектру излучения и энергией, излучаемой в единицу времени с единицы площади поверхности.

Потоком излучения Φ называется средняя по времени мощность излучения:

$$\Phi = \frac{W}{t}, \quad (1)$$

где W - энергия, излучаемая за время t .

Энергетической светимостью тела называется энергия, излучаемая в единицу времени единицей поверхности тела

$$R = \frac{W}{St}. \quad (2)$$

Подставляя (1)→(2), получаем

$$R = \frac{\Phi}{S}. \quad (3)$$

Испускательная способность (она же **спектральная плотность энергетической светимости**) тела описывает распределение энергии по спектру излучения:

$$r_{\omega} = \frac{dR}{d\omega} . \quad (4)$$

Очевидно, r_{ω} и R связаны интегральным соотношением:

$$R = \int_0^{\infty} r_{\omega} d\omega, \quad (5)$$

где ω - циклическая частота, связанная с длиной волны: $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$.

Падающее на тело излучение может пропускаться (если тело прозрачно), поглощаться и отражаться. Введем коэффициенты: τ - пропускания, ρ - отражения, α - поглощения, где каждый коэффициент определяет соответствующую долю потока излучения: $\tau + \rho + \alpha = 1$. Если $\tau=0$, $\rho=0$, то тогда $\alpha=1$, и тело только поглощает. В общем случае α_{ω} зависит от ω и T и называется **поглощательной способностью**. **Абсолютно черным** называется тело, полностью поглощающее падающий на него поток излучения. Для абсолютно черного тела

$$\alpha_{\omega} = 1. \quad (6)$$

Моделью абсолютно черного тела является замкнутая полость с малым отверстием, которая поддерживается при постоянной температуре. Излучение, падающее извне, полностью поглотится стенками полости вследствие многократных отражений и поглощений стенками.

Излучение, выходящее через отверстие, будет подобно

равновесному излучению абсолютно черного тела при этой температуре.

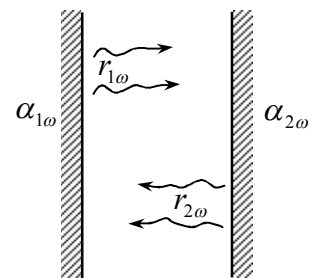


Рис.2

Закон Кирхгофа. Рассмотрим равновесное тепловое излучение, которое находится между двумя бесконечными плоскопараллельными пластинами из разных материалов, имеющими одинаковую температуру

(рис. 2). Пусть $r_{1\omega}, \alpha_{1\omega}$ - испускательная и поглотительная способности левой (первой) пластины; $r_{2\omega}, \alpha_{2\omega}$ - испускательная и поглотительная способности правой (второй) пластины. На единице поверхности правой пластины в единицу времени поглощается электромагнитная энергия $\alpha_{2\omega} r_{1\omega} d\omega$. Аналогичная величина для левой пластины равна $\alpha_{1\omega} r_{2\omega} d\omega$. При тепловом равновесии

$$\alpha_{1\omega} r_{2\omega} d\omega = \alpha_{2\omega} r_{1\omega} d\omega \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{r_{1\omega}}{\alpha_{1\omega}} = \frac{r_{2\omega}}{\alpha_{2\omega}} = f(\omega, T)}. \quad (7)$$

Это - **закона Кирхгофа: отношение испускательной способности любых тел к их поглотительной способности не зависит от природы тела, а является для всех тел одной и той же функцией температуры и частоты.** Функция $f(\omega, T)$ называется **универсальной функцией Кирхгофа**. Для абсолютно

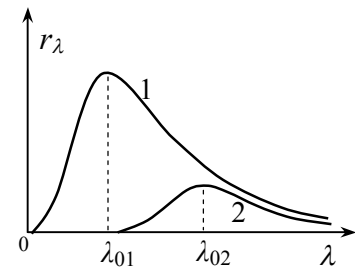


Рис.3

черного тела введем значок 0, тогда $f(\omega, T) = \frac{r_{0\omega}}{\alpha_{0\omega}}$. Так как для абсолютно чер-

ного тела $\alpha_{0\omega} = 1$, то

$$f(\omega, T) = r_{0\omega}. \quad (8)$$

Таким образом, универсальная функция Кирхгофа – это и есть испускательная способность абсолютно черного тела.

Закон Стефана-Больцмана устанавливает связь между энергетической светимостью и температурой тела: **энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры тела**

$$\boxed{R = \sigma T^4}, \quad (9)$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}^4$. Если (9) записать в виде $R = k\sigma T^4$, где $0 < k < 1$, то, зная k , можно использовать (9) и для тел, не являющихся абсолютно черными.

Спектральная плотность энергетической светимости (r_ω или r_λ) может быть введена не для интервала частот (4), а для интервала длин волн:

$$r_\lambda = \frac{dR}{d\lambda}. \quad (10)$$

Закон смещения Вина: *длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела, обратно пропорциональна абсолютной температуре тела.*

$$\boxed{\lambda_0 = \frac{C}{T}}, \quad (11)$$

где $C = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$. На рис. 3 в соответствии с (11) $\lambda_{02} > \lambda_{01} \Rightarrow T_1 > T_2$. Площадь под кривой численно равна энергетической светимости абсолютно черного тела при соответствующей температуре.

Формулы Рэля-Джинса и Планка. Для нахождения вида функции $f(\omega, T)$ Рэлей и Джинс исходили из теоремы о равном распределении внутренней энергии по степеням свободы. В результате была получена формула

$$f(\omega, T) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^2} kT, \quad (12)$$

которая согласуется с опытом только при больших длинах волн (малых частотах). На рис. 4 представлены опытная зависимость $r_{\omega\lambda}$ (кривая 1) и кривая 2, полученная из формулы (12). Интегрирование (12) в пределах от 0 до ∞ дает для энергетической светимости бесконечно большие значения, что иронично называется "ультрафиолетовой катастрофой". На самом деле при

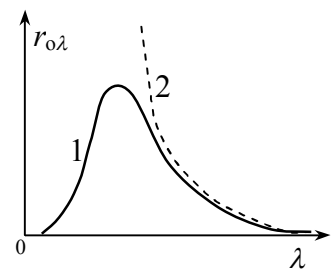


Рис.4

малых длинах волн неверна классическая формула (12). Чтобы получить правильную формулу для $f(\omega, T)$ Планк

рассмотрел полость с зеркальными стенками, внутри которой находятся осцилляторы - элементарные излучатели и поглотители электромагнитного излучения. Планк допустил, что осциллятор обладает дискретным спектром значений энергии и может изменить свою энергию только на величину, кратную $\hbar\omega$, где $\hbar$ - постоянная Планка. Так была получена **формула Планка**

$$f(\omega, T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2c^2} \cdot \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (13)$$

При малых ω эта формула переходит в формулу Рэлея-Джинса (12). Из формулы Планка можно получить экспериментальные законы Стефана-Больцмана (интегрированием формулы (13) в пределах от 0 до ∞) и смещения Вина (если решить задачу на нахождение экстремума). Гипотеза об испускании и поглощении электромагнитного излучения квантами $\varepsilon = \hbar\omega$ легла в фундамент квантовой физики.

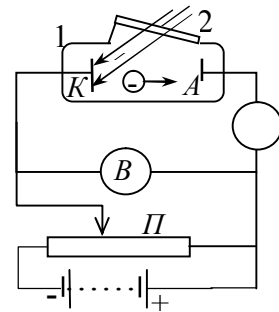


Рис.5

Лекция 2. Фотоэффект. Эффект Комптона.

Фотоэффектом называется испускание электронов под действием электромагнитного излучения (рис. 5). Излучение попадает в откачанный баллон 1 через кварцевое окно 2. Напряжение между катодом (K) и анодом (A) изменяется потенциометром (П). Электроны, испускаемые фотокатодом, создают ток. Зависимость фототока I от напряжения U приведена на рис. 6. С некоторого напряжения U фототок достигает насыщения (I_n).

С этого момента все электроны, испускаемые катодом, достигают анода. Даже при малых отрицательных значениях U фототок отличен от 0. Следовательно, кинетическая энергия некоторых фотоэлектронов оказывается достаточной для того, чтобы электроны попадали на анод. Величину U_3 можно определить

из условия:

$$eU_3 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2,$$

где e - заряд, m - масса, $v_{\max}$ - максимальная скорость фотоэлектрона. Максимальной скоростью обладают электроны, выбиваемые с поверхности металла.

Опытные законы фотоэффекта - следующие.

1. Фототок насыщения при падении на катод монохроматического потока излучения, пропорционален величине этого потока (закон Столетова): $I_n \approx \Phi$.

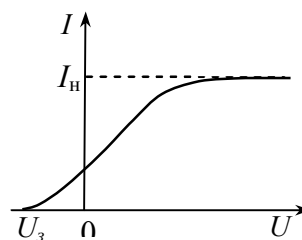


Рис.6.

2. Максимальная скорость фотоэлектронов не зависит от величины потока излучения, но определяется частотой падающего на фотокатод излучения

$$v_{\max} = v_{\max}(\omega).$$

3. Для каждого металла существует некоторая минимальная частота $\omega_{\min}$ (или максимальная длина волны $\lambda_{\max}$) падающего излучения, при которых еще имеет место фотоэффект. Эту длину волны $\lambda_{\max}$ называют **красной границей фотоэффекта**.

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Фотоны. Развивая идеи М. Планка, А.Эйнштейн в 1905 г предпринял успешную попытку объяснения законов фотоэффекта. В соответствии с этой теорией энергия ($\hbar\omega$) каждого кванта должна расходоваться на работу выхода электрона из металла (A) и сообщение фотоэлектрону кинетической энергии.

Формула Эйнштейна для фотоэффекта имеет вид

$$\hbar\omega = A + \frac{1}{2}mv_{\max}^2. \quad (14)$$

Из этой формулы следует выполнение второго и третьего законов фотоэф-

фекта. Найдем выражение для красной границы фотоэффекта. Минимальную энергию кванта, при которой еще возможен фотоэффект, определим из формулы (14):

$$\begin{aligned} \hbar\omega_{\min} = A, \quad \Rightarrow \quad \omega_{\min} = \frac{A}{\hbar}, \quad \Rightarrow \\ \lambda_{\max} = \frac{2\pi\hbar c}{A}. \end{aligned} \quad (15)$$

Квант (фотон) имеет скорость $c=3\cdot 10^8$ м/с, масса покоя его равна 0. Импульс фотона

$$p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{\hbar 2\pi}{\lambda} = \hbar k, \quad (16)$$

где k - волновое число. Фотон движется в направлении распространения электромагнитной волны.

Эффект Комптона состоит в том, что при рассеянии рентгеновских лучей с длиной волны λ_0 , в рассеянном излучении присутствуют не только λ_0 , но и большие длины волн $\lambda > \lambda_0$. Согласно классической теории при рассеянии не должно быть изменения длин волн. Опыты Комптона показали, что эффект является результатом взаимодействия падающих на вещество рентгеновских фотонов со свободными электронами атомов. При этом смещение длины волны $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ зависит только от угла рассеяния θ и не зависит от рассеивающего вещества. Законы сохранения энергии и импульса (рис.7) для взаимодействия рентгеновского кванта со свободным

электроном имеют вид

$$\varepsilon + m_0 c^2 = \varepsilon' + m c^2, \quad (17)$$

$$\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon'}{c}\right)^2 - 2\frac{\varepsilon}{c} \cdot \frac{\varepsilon'}{c} \cos\theta = (p')^2 \quad (18)$$

где ε и ε' - энергии, $\frac{\varepsilon}{c}$ и $\frac{\varepsilon'}{c}$ - импульсы падающего и рассеянного фотонов;

$m_0 c^2$ - энергия свободного электрона, масса которого $\approx$

массе покоя m_0 ; mc^2 и p' - энергия и импульс электрона после взаимодействия с фотоном. Связь между энергией и импульсом релятивистского электрона (см. инварианты теории относительности) имеет вид

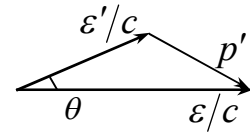


Рис. 7.

$$m^2 c^4 - p'^2 c^2 = m_0^2 c^4. \quad (19)$$

Из (17) найдем

$$(mc^2)^2 = (\varepsilon - \varepsilon' + m_0 c^2)^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + m_0^2 c^4 - 2\varepsilon\varepsilon' + 2\varepsilon m_0 c^2 - 2\varepsilon' m_0 c^2;$$

Из (18) $\Rightarrow$

$$(p'c)^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon'^2 - 2\varepsilon\varepsilon' \cos \theta,$$

что подставим в (19). После сокращений получим

$$\varepsilon - \varepsilon' = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta) \quad (20)$$

Переходя к длинам волн, получим величину сдвига длины волны в эффекте Комптона

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{2\pi\hbar}{m_0 c} (1 - \cos \theta), \text{ или}$$

$$\boxed{\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = 0,024 \cdot 10^{-10} (1 - \cos \theta)} \text{, м.}$$

Величина $\Delta\lambda$ весьма мала, и обнаружить ее можно только для рентгеновских лучей. Для видимого диапазона ($\lambda \sim 5 \cdot 10^{-7}$ м) измерить столь малое изменение длины волны практически невозможно. Наличие несмещенной компоненты в рассеянном излучении обусловлено внутренними электронами атомов рассеивающего вещества. Их энергия связи сравнима с энер-

гией рентгеновских фотонов, значит, такие электроны уже нельзя считать свободными. В этом случае обмен энергией и импульсом рентгеновского фотона происходит с атомом как целым. Поскольку масса атома значительно превышает массу электрона, комптоновское смещение фотонов на таких атомах ничтожно и длина рассеянной волны совпадает с длиной волны падающего излучения.

Лекция 3. Строение атома

Модель атома Томсона. Опыты Резерфорда по рассеянию α -частиц. Согласно модели атома Томсона, положительный заряд равномерно распределен по всему объему атома, в который вкраплены электроны. Для проверки правильности этой модели в 1911-1913 гг. Ре-

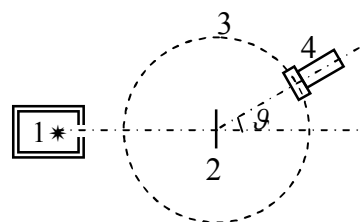


Рис. 8

зерфорд выполнил эксперименты по рассеянию α -частиц (рис.8). Узкий пучок α -частиц из источника 1 падал на тонкую фольгу 2. В том месте на экране 3, куда попадали α -частицы, происходили вспышки, видные под микроскопом 4. Микроскоп с экраном располагался под разными углами ϑ . Установка находилась в откачанном сосуде для исключения столкновений α -частиц с молекулами воздуха. Если модель Томсона справедлива (в атоме нет объектов, сравнимых по массе и величине заряда с α -частицей), то после прохождения металлической фольги α - частицы не должны менять свое направление.

Действительно, почти все α -частицы не отклонялись от первоначального направления, однако некоторые, примерно 0,01 % , отклонялись на углы $\vartheta > 90^\circ$. Следовательно, основная масса атома сконцентрирована в весьма малом (по сравнению с самим атомом) положительно заряженном ядре размером $\sim 10^{-14}$ м по оценке Резерфорда. Большинство α -частиц пролетает, не

взаимодействуя с ядрами, и не меняет своего направления. Резерфорд предложил планетарную модель атома: в центре атома находится положительно заряженное ядро, а вокруг ядра вращаются электроны. Однако в соответствии с классической электродинамикой, электрон, двигаясь с центростремительным ускорением вокруг ядра, должен излучать энергию и, в конце концов, упасть на ядро, т.е. атомы должны быть неустойчивыми системами, что противоречит опыту. Модель Резерфорда не в состоянии разрешить это противоречие.

Постулаты Бора. Датский физик Н.Бор в 1913 г. предложил теорию атома, в основе которой лежат два постулата:

1. ***Электроны в атомах могут находиться только на определенных стационарных орбитах, при этом не происходит ни излучения, ни поглощения энергии.*** Условием стационарности орбит по Бору является квантование орбитального момента импульса электрона:

$$mvr = n\hbar, \quad (21)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$

m - масса электрона,

v - его скорость,

r - радиус орбиты.

2. ***Излучение и поглощение энергии атомом происходит при переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую. При этом величина кванта излучения или поглощения равна разности энергий соответствующих стационарных состояний.***

$$\hbar\omega = E_n - E_m. \quad (22)$$

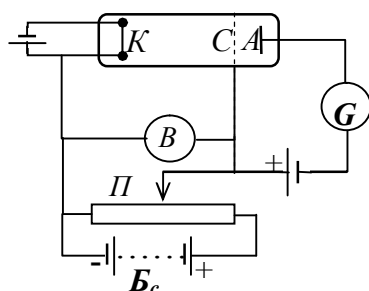


Рис.9

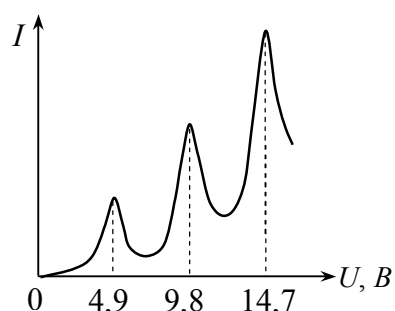


Рис.10

Первым доказательством существования у атомов дискретных энергетических уровней является *опыт Франка и Герца* (рис. 9). В трубке при пониженном давлении находятся пары ртути. Батарея *Бс* создает небольшое задерживающее поле ($-0,5\text{ В}$) между сеткой (*С*) и анодом (*А*). Ток регулируется потенциометром *П*. На рис. 10 представлена зависимость силы тока от напряжения между катодом и сеткой. При $U=4,9\text{ В}$ энергия электронов равна $4,9\text{ эВ}$. Пока энергия электронов меньше этой величины столкновения с атомами ртути носят упругий характер, энергия электронов при этом не меняется, с ростом U растет I . При достижении электроном энергии $4,9\text{ эВ}$ и больше столкновения перестают быть упругими. Электроны отдают атомам ртути энергию $4,9\text{ эВ}$. Оставшейся энергии может не хватить для достижения ими анода. Следовательно, разность между двумя дискретными уровнями атома ртути составляет $4,9\text{ эВ}$. Столкнуться с атомами ртути и т.д. При энергии электронов $9,8\text{ эВ}$ они могут дважды не упруго столкнуться с атомами ртути и т.д.

водородоподобных ионов по Бору. *Гипотеза де Бройля*

Водородоподобными ионами называются ионы, имеющие один электрон, в частности, He^+ , Li^{++} , Be^{+++} . Для электрона на орбите имеет место второй закон Ньютона:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2}. \quad (23)$$

Из (23) и (21) можно определить радиус орбиты, скорость электрона на орбите, энергию электрона. Из (23) следует

$$4\pi\epsilon_0 mv^2 r = Ze^2. \quad (24)$$

Поделим (24) на (21): $\frac{4\pi\epsilon_0 mv^2 r}{mvr} = \frac{Ze^2}{n\hbar}$, $\Rightarrow$

$$\boxed{v = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 n\hbar}}. \quad (25)$$

Подставим (25) $\rightarrow$ (23) $\rightarrow$

$$\boxed{r = \frac{n\hbar}{mv} = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{mZe^2}}. \quad (26)$$

Полная энергия электрона на орбите складывается из кинетической и потенциальной энергии, причем потенциальная энергия отрицательна.

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}. \quad (27)$$

Из (23) следует $\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \rightarrow$ (27). Тогда полная энергия равна

$$E = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}, \quad (28)$$

(26) $\rightarrow$ (28) $\rightarrow$

$$E = -\frac{me^4 Z^2}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (29)$$

Таким образом, полная энергия электронов в стационарных состояниях является отрицательной. Для атома водорода $Z=1$.

Закономерности в атомных спектрах. Недостатки теории Бора.

Теория атома Бора позволила объяснить происхождение спектров атома водорода и водородоподобных ионов. Согласно Бору, частоты электромагнитных волн, излучаемых атомами, определяются разностью энергий стационарных состояний до и после излучения. К концу XIX было установлено, что атомные спектры состоят из отдельных линий, которые могут быть объединены в серии. Так, например, в спектре водорода фиксируется пять серий. В ультрафиолетовой области спектра наблюдается серия **Лаймана**, частоты линий которой подчиняются соотношению

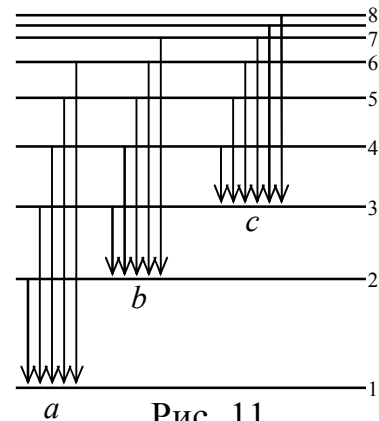


Рис. 11

$$\omega = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n = 1, 2, 3, 4, \dots), \quad (30)$$

где R - постоянная Ридберга. Для серии **Бальмера** (видимая область спектра) выполняется соотношение

$$\omega = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n = 3, 4, 5, \dots). \quad (31)$$

Для частот линий всех серий справедлива формула

$$\omega = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad (n = (m+1), (m+2), \dots) \quad (32)$$

При $n \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow \frac{R}{m^2}$. Это значение частоты называется **границей серии**. Теория

Бора хорошо объясняет приведенные выше закономерности. На рис. 11 представлены энергетические уровни атома водорода и переходы,

соответствующие сериям Лаймана (*a*), Бальмера (*b*) и Пашена (*c*). При больших значениях *n* уровни практически расположены непрерывно. Несмотря на успехи теории Бора, ей присущи и недостатки: 1) она не является ни последовательно классической, ни последовательно квантовой; 2) не объясняет устойчивости атома; 3) не позволяет создать теорию атома гелия и других атомов. Теория Бора, великолепно разрешив целый ряд физических задач, оказалась неспособной к объяснению других. Таким образом, теория Бора является только одним из этапов в создании более общей теории.

Гипотеза де Бройля. Вследствие двойственного характера электромагнитного излучения, особому микрообъекту фотону свойственен **квантово-волновой дуализм**: в одних опытах он проявляет квантовые (корпускулярные) свойства (фотоэффект, эффект Комптона), а в других - волновые (интерференция, дифракция). В 1924г. де Бройль предположил, что описанный выше дуализм присущ любым микрообъектам, например, электронам. Энергия и импульс фотона определяются формулами

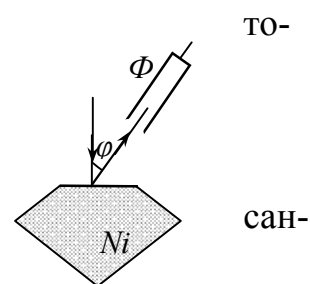


Рис. 12.

$$E = \hbar\omega; \quad (33)$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}. \quad (34)$$

Гипотеза де Бройля заключалась в том, что *любому движущемуся микрообъекту могут быть сопоставлены длина волны и частота*, выраженные из формул (33) и (34), т.е.

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{mv}; \quad \omega = \frac{E}{\hbar}. \quad (36)$$

Например, для электрона, ускоренного в полях обычных электронных

приборов ($U \sim 10^4$) В, скорость можно определить из формулы

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU, \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \rightarrow (36), \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m} \sqrt{\frac{m}{2eU}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2emU}} \approx 1 \text{ \AA}, \quad (37)$$

что $\approx$ длине волны рентгеновских лучей. Если размер приборов $l \sim 10$ см, то $\lambda \ll l$, и волновые свойства пучка электронов в таких условиях не проявятся. Поэтому волновые свойства электронов стали искать на периодических структурах порядка межатомных расстояний, т.е. на кристаллических решетках. Так, в *опыте Девиссона и Джермера* (1927 г.) электроны отражались от поверхности монокристалла никеля (рис. 12) и затем попадали в цилиндр Фарадея (Φ), присоединенный к гальванометру. Большинство рассеянных электронов наблюдалось при угле φ , указывающем на отражение от атомных плоскостей, расстояние между которыми d было известно. Соответствующая длина волны, вычисленная по формуле (37), оказалась равной $1.67 \text{ \AA}$. А длина волны, определенная из рентгенографических

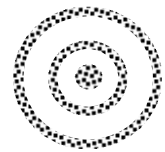


Рис. 13

исследований по формуле Вульфа-Брэгга, оказалась равной $1,65 \text{ \AA}$. Совпадение этих значений является прямым доказательством гипотезы де Бройля.

Другим опытом, подтверждающим гипотезу де Бройля, являются опыты по дифракции электронов на поликристаллической структуре металлической фольги (*Тартаковский, Томсон*). Оказалось, что полученная таким образом дифракционная картина (рис.13), эквивалентна рентгенограмме, полученной при дифракции рентгеновских лучей на той же структуре. Поскольку через металлическую фольгу проходило одновременно большое количество электронов, можно было говорить о волновых свойствах пучка электронов. Однако в 1949 г. Биберман, Сушкин и Фабрикант провели опыты при последовательном прохождении отдельных электронов

через фольгу. При достаточно большой экспозиции была получена весьма похожая дифракционная картина, чем было доказано, что отдельный электрон обладает волновыми свойствами. Таким образом, экспериментально была подтверждена гипотеза де Бройля.

Свойства микрообъектов. Микрообъект может проявлять как квантовые (корпускулярные), так и волновые свойства. Но, строго говоря, **микрообъект не является в классическом представлении ни частицей, ни волной.**

Отличие микрообъекта от волны состоит, например, в том, что он всегда обнаруживается как целое, нельзя наблюдать пол-электрона. Волну же с помощью полупрозрачного зеркала можно разделить на части. Микрообъект отличается и от макрочастицы тем, что к нему в общем случае не применимо понятие траектории. Это поясняет эксперимент, в кото-

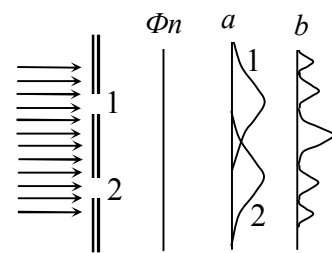


Рис.

ром параллельный пучок электронов падает на ширму с двумя щелями (рис. 14). Сначала закроем щель 2. Почернение на фотопластинке Φn представлено кривой 1(a). Закрыв щель 1, получим кривую 2 (a). Если открыть обе щели, то результат почернения (б) - не является наложением кривых 1 и 2, но подобен картине при интерференции волн от двух когерентных источников. Следовательно, на движение электрона каким-то образом оказывают влияние обе щели, т.е. нельзя говорить о классической траектории движения электрона. Волны де Бройля отличаются от объективно существующих электромагнитных волн. Например, невозможно заранее указать место на фотопластинке, в которое попадет электрон. Это вносит в рассуждения вероятностный характер. Поэтому волны де Бройля называют волнами вероятности. Интенсивность сопоставляемой микрообъекту волны в некоторой точке оказывается

пропорциональной вероятности найти частицу в окрестности той же точки.

Соотношение неопределенностей. Особые свойства микрообъектов, выражают сформулированные в 1927 г. В.Гейзенбергом соотношения

неопределенностей: **невозможно одновременное и точное определение координаты и импульса (или скорости) микрообъекта.** Это утверждение математически можно записать в виде неравенств:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar ; \quad \Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar ; \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar \quad (38)$$

где $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ - неопределенности в определении координат частицы; $\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$ - неопределенности в определении **соответствующих проекций** ее импульса.

Соотношение неопределенностей для энергии и времени записывается следующим образом:

$$\boxed{\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar} \quad (39)$$

где ΔE - неопределенность энергии микрообъекта, а Δt - время существования в состоянии с этой энергией. Например, если атом находится в

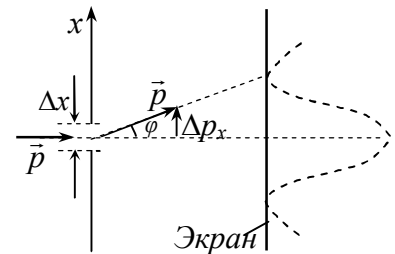


Рис. 15

возбужденном состоянии, то ΔE - естественная ширина энергетического уровня, соответствующего этому состоянию, а Δt - время жизни атома в возбужденном состоянии. **Неопределенности обусловлены не недостаточной точностью измерительных приборов, а сущностью самих микрообъектов.**

Покажем, что произведение неопределенностей имеет порядок постоянной Планка. Пусть микрообъект проходит через щель шириной Δx (рис. 15), $\Rightarrow$ неопределенность его координаты в момент прохождения щели равна Δx . Оценим Δp_x ,

допустив, что частица на экране окажется в пределах первого дифракционного максимума (угол φ определяет направление на первый минимум, $\Rightarrow$

$$\Delta x \sin \varphi = \lambda). \text{ Тогда } \Delta p_x = p \cdot \sin \varphi . \Rightarrow \Delta p_x = \frac{\lambda}{\Delta x} , \Rightarrow$$

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = p \lambda . \quad (40)$$

Подставляя длину волны де Бройля (36) $\rightarrow$ (40), получим

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = p \frac{2\pi\hbar}{p} = 2\pi\hbar,$$

что с точностью до порядка величины в правой части, совпадает с (38). Под-

ставляя в (38) $p_x = m v_x$, получим $\Delta x \cdot \Delta v_x \geq \frac{\hbar}{m}$, $\Rightarrow$ чем больше m , тем меньше

неопределенность координаты и скорости. Поэтому для макрообъектов соотношения неопределенности учитывать не нужно.

Некоторые следствия соотношения неопределенностей

[1]. К микрообъектам в принципе неприменимо понятие траектории. Это вытекает из того, что $\Delta x \neq 0$.

[2]. Доказательство стабильности атома. Радиус атома водорода $\sim 10^{-10} \text{ м}$, $\Rightarrow$ для электрона в атоме водорода $\Delta x = 10^{-10} \text{ м}$. Если бы электрон упал на ядро, размеры которого 10^{-14} м , то для него $\Delta x = 10^{-14} \text{ м}$. Учитывая, что $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$, из (38) получим

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{1,054 \cdot 10^{-34}}{10^{-14}} \geq 10^{20} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

При этом импульс электрона должен иметь, по крайней мере, такой же порядок, а такому импульсу соответствует энергия электрона, при которой он должен вылететь из атома наружу.

Лекция 5. Волновая функция. Уравнение Шредингера.

Развитием гипотезы де Бройля стало сопоставление движению микрообъекта волновой функции $\Psi(x, y, z, t)$, сделанное Шредингером. Свободное движение микрообъекта с определенной энергией и импульсом было предложено описывать **волновой функцией**, соответствующей плоской волне де Бройля. Эта

функция имеет вид

$$\Psi = \Psi_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad (41)$$

где $\vec{k}$ - волновой вектор ($\vec{k} = k\vec{n}$ - волновое число, $\vec{n}$ - нормаль к волновому фронту), $\vec{r}$ - радиус-вектор частицы. Поскольку микрообъекту свойственен корпускулярно-волновой дуализм, волновая функция не может иметь прямого физического смысла. Однако М. Борном была дана **статистическая интерпретация Ψ -функции**, согласно которой квадрат ее модуля определяет вероятность (dP) того, что частица будет обнаружена в пределах некоторого объема dV .

$$dP = |\Psi|^2 dV = \Psi \Psi^* dV, \quad (42)$$

где Ψ^* - комплексно сопряженная функция по отношению к Ψ ; $\int dP = \int \Psi \Psi^* dV = 1$, ибо этот интеграл определяет вероятность того, что микрообъект находится в одной из точек всего объема V , т.е. вероятность достоверного события. Условие, налагаемое на волновую функцию

$$\int \Psi \Psi^* dV = 1, \quad (43)$$

есть **условие нормировки**, а функция, удовлетворяющая этому условию, называется нормированной. Из (42) следует, что

$$|\Psi|^2 = \frac{dP}{dV}, \quad (44)$$

Следовательно, **квадрат модуля волновой функции представляет собой плотность вероятности нахождения микрообъекта в соответствующем месте пространства.**

Из смысла волновой функции следуют ее **свойства**: однозначность, конечность и непрерывность во всей области изменения, а также тот факт, по $|\Psi|^2$, можно предсказать вероятность обнаружения микрообъекта в окрест-

ности любой точки пространства.

Принцип суперпозиции состояний является одним из фундаментальных положений волновой теории. Из классической механики известно, что при суперпозиции волновых функций получается новая волновая функция. Кроме того, существует состояние покоя, в котором волновая функция равна нулю во всех точках пространства. В квантовой механике результат суперпозиции волновых функций будет существенно иным. Если, например, система может находиться в двух состояниях с энергиями E_1 и E_2 , которые описываются волновыми функциями Ψ_1 и Ψ_2 соответственно, то в результате суперпозиции этих состояний возможно состояние с волновой функцией

$$\Psi = c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2, \quad (45)$$

которая с вероятностью $|c_1|^2$ описывает состояние с энергией E_1 и с вероятностью $|c_2|^2$ описывает состояние с энергией E_2 . Набор всех $\{\Psi_i\}$ для любой физической величины (например, энергии) есть **полная система собственных функций**. Волновую функцию любого состояния можно разложить по собственным функциям:

$$\Psi = \sum_n c_n \Psi_n. \quad (46)$$

Уравнение Шредингера. В 1926 г. Шредингер написал основное уравнение для квантово-механического описания материи. Применение этого уравнения позволяет получить набор стационарных энергетических состояний в атомах, объяснить природу химической связи. Рассмотрим один из возможных путей получения уравнения Шредингера (это не вывод, поскольку уравнение Шредингера является основным постулатом квантовой физики). Параллельному пучку микрообъектов, движущихся вдоль оси X , в соответствии с (41) можно сопоставить волновую функцию

$$\Psi = ae^{-i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x)}. \quad (47)$$

По де Бройлю свободному движению частиц соответствует плоская волна с частотой

$$\omega = \frac{E}{\hbar} \quad (48)$$

и длиной волны

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}. \quad (49)$$

(48), (49) $\rightarrow$ (47) $\rightarrow$

$$\Psi = ae^{-i(\frac{E}{\hbar}t - \frac{P}{\hbar}x)} = ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)} \quad (50)$$

Найдем первую производную от этой функции по времени и вторую по координате

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)} \cdot \left(-\frac{i}{\hbar}E\right) = -\frac{i}{\hbar}E\Psi, \Rightarrow$$

$$E = -\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \cdot \frac{1}{\Psi} = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \cdot \frac{1}{\Psi}, \quad (51)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)} \cdot \left(\frac{i}{\hbar}p\right), \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \left(\frac{i}{\hbar}p\right)^2 \Psi = -\frac{1}{\hbar^2}p^2 \Psi, \Rightarrow$$

$$\boxed{p^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{\Psi}}. \quad (52)$$

Подставим (51) и (52) в выражение $E = \frac{p^2}{2m}$ и получим *уравнение Шредингера для свободной частицы, движущейся вдоль оси x*:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (53)$$

Если направление движения частиц не совпадает с осью x , то вместо (53) нужно написать

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

или $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$ (54)

Это уравнение называется **уравнением Шредингера для свободной частицы**, т.е. частицы, не находящейся в потенциальном поле. В этом случае можно разделить временную и пространственную части волновой функции, т.е. представить ее в виде произведения

$$\Psi(x, y, z, t) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t} \cdot \psi(x, y, z). \quad (55)$$

Подставляя (55) → (54) получим $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi e^{-\frac{iE}{\hbar}t} = i\hbar \left(-i \frac{E}{\hbar}\right) \psi e^{-\frac{iE}{\hbar}t}$, и после со-

кращения находим $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = E \psi$, или

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0. \quad (56)$$

Уравнение (56) называется **уравнением Шредингера для стационарных состояний свободной частицы**. В общем случае стационарными состояниями называются состояния, для которых E и $|\psi|$ не зависят от времени. При движении частицы в потенциальном поле

$$E = E_{\kappa} + U \quad (57)$$

где E - полная энергия частицы, E_{κ} - ее кинетическая энергия, U - ее потенциальная энергия. Для свободной частицы $E=E_{\kappa}$, следовательно, в общем случае

$$E_{\kappa} = E - U. \quad (58)$$

Подставляя E_{κ} из (58) $\rightarrow$ (56) вместо E , получим уравнение Шредингера для **стационарных состояний частицы, движущейся в потенциальном поле**

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0. \quad (59)$$

Частица в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме. Пусть частица может двигаться только вдоль оси x (рис. 16) и не может выйти за пределы ямы. При этом $U = 0$, если $0 \leq x \leq l$ и $U = \infty$, если $x < 0$ и $x > l$. Для одномерного случая из (59) получим

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0, \quad (60)$$

и для области внутри ямы

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0. \quad (61)$$

Обозначим $\frac{2m}{\hbar^2}E \equiv \omega^2$ и подставим в (61):

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \omega^2\psi = 0 \quad (62)$$

Это уравнение формально похоже на уравнение гармонических колебаний. По-

этому решение уравнения (62) следует искать в виде

$$\psi(x) = a \sin(\omega x + \alpha) \quad (63)$$

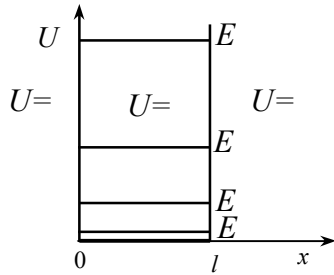


Рис. 16

Отметим еще раз, что за пределами ямы частица оказаться не может. Поэтому вероятность обнаружить частицу вне ямы равна 0. Следовательно, из условия непрерывности волновой функции можно утверждать, что и на границах должны выполняться условия

$$\psi(0) = 0, \quad (64)$$

$$\psi(l) = 0. \quad (65)$$

Рассмотрим совместно (64) и (65).

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow \psi(x) = a \sin \alpha = 0, \Rightarrow \sin \alpha = 0, \Rightarrow \alpha = 0; \quad (66)$$

$$\psi(l) = 0, \Rightarrow \psi(l) = a \sin \omega l = 0, \Rightarrow \omega l = n \pi, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (67)$$

Взять $n = 0$ в формуле (67) нельзя, так как при этом волновая функция тождественно равна 0 и частица в яме отсутствует. Из (67) следует, что

$$\omega^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2}.$$

Таким образом, **энергия частицы в бесконечно глубокой яме квантуется** и собственные значения этой энергии зависят от целого числа n :

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (68)$$

Разность энергий двух соседних уровней увеличивается с ростом n :

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 (2n + 1). \quad (69)$$

Подставляя в (63) $\omega^2 = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$, получим **собственные волновые функции**

$$\psi_n = a \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (70)$$

Величину a найдем из условия норми-

ровки: $a^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = 1$. В данном слу-

чае

$$\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \overline{\sin^2 \frac{n\pi x}{l}} \cdot l = \frac{1}{2} l,$$

где чертой отмечено среднее квадрата синус-

$$\text{са, } \Rightarrow a^2 \frac{l}{2} = 1, \Rightarrow$$

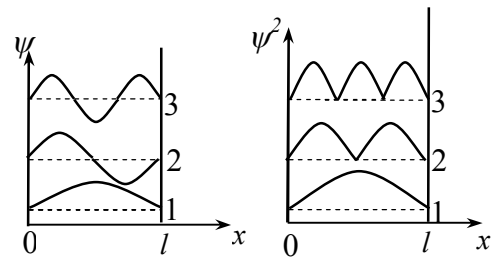


Рис.17

$$a = \sqrt{\frac{2}{l}}. \quad (71)$$

Подставляя (71) → (70), получим **нормированные собственные волновые функции**

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (72)$$

На рис. 17 представлены графики изменения волновой функции и квадрата ее модуля для первых трех значений n . Рассмотрим $|\psi|^2$ для $n=2$.

Наибольшая вероятность обнаружить частицу имеем при $x = l/4$ и $x = 3l/4$, однако при $x = l/2$ $|\psi|^2 = 0$. Значит, в центре ямы и на её краях вероятность найти частицу близка к нулю (при $n=2$).

Лекция 6. Квантовый гармонический осциллятор. Атом водорода по Шредингеру

В квантовой теории понятие силы теряет смысл, поэтому квантовый гармонический осциллятор определим как поведение микрообъекта массы m с потенциальной энергией $U = \frac{kx^2}{2}$, такой же, как у классического осциллятора.

Заметим, что график зависимости U от x – парабола. Введем обозначение

$\omega^2 \equiv k/m$, тогда потенциальную энергию можно записать так

$$U = \frac{m\omega^2}{2}x^2. \quad (73)$$

Запишем одномерное уравнение Шредингера для объекта с таким видом потенциальной энергии, т.е. уравнение Шредингера для квантового гармонического осциллятора

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{m\omega^2}{2}x^2 \right) \psi = 0. \quad (74)$$

Мы не будем приводить решение этого уравнения из-за его сложности, однако отметим, что конечные, однозначные и непрерывные решения могут иметь место только при собственных значениях энергии, равных

$$E_v = \left(v + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega, \quad v = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (75)$$

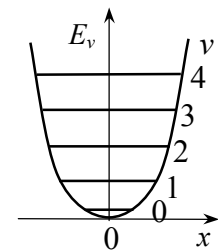


Рис.18

Схема энергетических уровней квантового гармонического осциллятора представлена на рис.18. Видно, что уровни отстоят друг от друга на одинаковую величину. Минимальная энергия $E_0 = \hbar\omega/2 \neq 0$! То, что минимальная энергия квантового гармонического осциллятора не равна нулю (частица не может лежать на дне ямы) связано с принципом неопределенности. Если бы энергия равнялась нулю, то частица покоилась бы, и ее импульс и координата имели бы определенные значения, что противоречит принципу неопределенности. Детальный расчет показывает, что для квантового осциллятора допустимы лишь переходы между соседними стационарными уровнями энергии, при которых квантовое число v изменяется на единицу

$$\Delta v = \pm 1. \quad (76)$$

Это условие называется правилом отбора для квантового гармонического ос-

циллятора.

Колебания молекул. В атомной физике к осциллятору сводятся задача о колебаниях молекул и многие другие важные задачи. На рис. 19 представлена типичная потенциальная кривая взаимодействия атомов для двухатомной молекулы, где r – расстояние между атомами. Вид кривой $U(r)$ показывает, что атомы могут совершать колебания относительно равновесного расстояния r_0

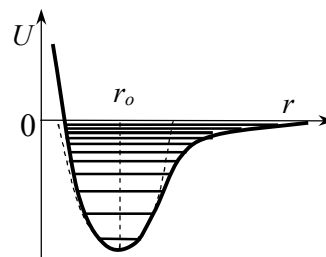


Рис.19

между ядрами атомов и у молекулы должны существовать дискретные уровни энергии. Эти уровни также описываются формулой (75), но теперь $\omega = \sqrt{k/\mu}$, где приведенная масса молекулы

$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Нижняя часть потенциальной кривой совпадает с параболой

(пунктир), поэтому нижние уровни эквидистантны, как у квантового гармонического осциллятора. Поэтому весь колебательный спектр должен состоять из одной линии в соответствии с правилами отбора (76).

На самом деле спектр является колебательно-вращательным. По мере увеличения амплитуды (и интенсивности) колебаний накапливается их отклонение от гармоничности: уровни сгущаются с ростом квантового числа ν и в формулу (75) необходимо вводить поправку на ангармоничность. Спектры – незаменимый источник информации для структурных исследований в физике и химии, так как они исключительно чувствительны к особенностям строения молекул и межмолекулярным взаимодействиям.

Атом водорода. Атом водорода состоит из протона и электрона, где масса протона в 1836 раз больше массы электрона. Поэтому в первом приближении можно считать, что электрон движется в поле неподвижного протона. Уравнение Шредингера для электрона в атоме водорода имеет вид

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0, \quad (77)$$

где потенциальная энергия электрона в поле протона равна

$$U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (78)$$

Так как $U = U(r)$, то и уравнение Шредингера нужно записать в сферических координатах. Связь между сферическими и прямоугольными декартовыми координатами известна: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $x = r \sin \Theta \cos \varphi$; $y = r \sin \Theta \sin \varphi$; $z = r \cos \Theta$.

Решение уравнения Шредингера в этом случае можно искать в виде $\psi(r, \Theta, \varphi) = \psi(r)\psi(\Theta)\psi(\varphi)$. Нормальное состояние атома водорода сферически симметрично, значит, волновая функция зависит только от r . В этом случае оператор Лапласа в сферических координатах записывается просто:

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad (79)$$

а само уравнение Шредингера после подстановки (79, 78) $\rightarrow$ (77), выглядит так

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0. \quad (80)$$

Сферически симметричную волновую функцию будем искать в виде

$$\psi(r) = ce^{-\frac{r}{a}}. \quad (81)$$

Отметим, что такая функция имеет конечное значение при $r=0$, а при $r \rightarrow \infty$, $\psi(r) \rightarrow 0$. Находим первую и вторую производные (81) по r .

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\frac{c}{a^2} e^{-\frac{r}{a}}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} = \frac{c}{a^2} e^{-\frac{r}{a}}. \quad (82)$$

Подставим (81,82) $\rightarrow$ (80) $\Rightarrow$

$$\frac{c}{a^2} e^{-\frac{r}{a}} + \frac{2}{r} \left(-\frac{c}{a}\right) e^{-\frac{r}{a}} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right) c e^{-\frac{r}{a}} = 0;$$

сокращаем и группируем:

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\right) + \frac{1}{r} \left(-\frac{2}{a} + \frac{2me^2}{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}\right) = 0.$$

Это равенство должно выполняться при любых r , поэтому обе скобки должны в отдельности равняться нулю. Решая систему, найдем величины a и E :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a^2} &= -\frac{2m}{\hbar^2} E \\ \frac{1}{a} &= \frac{me^2}{\hbar^2 4\pi\epsilon_0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}, \\ E &= -\frac{me^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2}. \end{aligned} \quad (83)$$

$$(84)$$

Сравнивая (83) и (84) с формулами (26) и (29), видим, что они эквиваленты радиусу первой Боровской орбиты атома водорода и энергии электрона на ней, т.е. можно записать:

$$a_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}, \quad E_1 = -\frac{me^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2}. \quad (85)$$

Вероятность нахождения электрона в шаровом слое радиуса r и толщиной dr , равна

$$dP = |\psi(r)|^2 4\pi r^2 dr = |c|^2 e^{-2\frac{r}{a_1}} 4\pi r^2 dr,$$

где $4\pi r^2 dr$ – объем шарового слоя радиуса r .

Следовательно, для рассматриваемого основного состояния атома водорода расстояния от электрона до протона распределены с плотностью вероятности

$$\frac{dP}{dr} = w(r) \sim r^2 e^{-2\frac{r}{a_1}}.$$

При этом если $r = 0$, то $w(r) = 0$ и если $r \rightarrow \infty$, то $w(r) \rightarrow 0$. Таким образом, существует вероятность обнаружить электрон на любом расстоянии от ядра от 0 до ∞ . Вычислим r , для которого эта вероятность достигает максимума:

$$\frac{dw}{dr} = 2re^{-\frac{2r}{a_1}} - \frac{2}{a_1}r^2e^{-\frac{2r}{a_1}} = 0, \quad 1 - \frac{r}{a_1} = 0, \Rightarrow \boxed{r = a_1} \quad (86)$$

Следовательно, наибольшая вероятность соответствует радиусу первой боровской орбиты. Однако в данном случае получилась сфера радиуса a_1 , а не плоская орбита по Бору. Существенно, что при такой постановке задачи не было получено квантования энергии. Однако при допущении пребывания электрона только в области, ограниченной объемом атома, квантование автоматически получается из уравнения Шредингера (80).

Лекция 7. Пространственное квантование. Принцип Паули. Многоэлектронные атомы.

Квантовые числа. Состояние электрона в атоме водорода характеризуется тремя квантовыми числами: n, l, m .

n - **главное квантовое число**. Оно определяет дискретные значения энергии электрона в атоме. Для атома водорода

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \quad (87)$$

Это квантовое число может принимать следующие значения: $n = 1, 2, 3, \dots$

l - **орбитальное квантовое число**. Оно характеризует орбитальный момент импульса электрона:

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar, \quad (88)$$

где $l = 0, 1, 2, 3, \dots (n-1)$. Из (113) следует, что орбитальный момент импульса электрона квантуется.

m - **магнитное квантовое число** - характеризует величину проекции $\vec{L}$ на направление внешнего магнитного поля:

$$L_z = m\hbar. \quad (89)$$

m имеет следующие значения: $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$.

Пространственное квантование. При данном значении l проекция орбитального момента импульса электрона на направление внешнего магнитного поля может принимать $2l+1$ значение. Сам вектор $\vec{L}$ может иметь только определенную ориентацию в пространстве относительно направления внешнего магнитного поля $\vec{B}$. Этот факт называется пространственным квантованием. На рис. 27

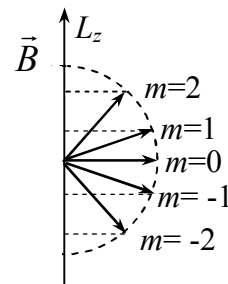


Рис.27

представлены возможные ориентации вектора $\vec{L}$ относительно направления внешнего магнитного поля.

В 1925 г. **Гоудсмит** и **Уленбек** предположили, что наряду с орбитальным моментом импульса электрона существует собственный момент импульса электрона - **спин** и связанный с ним **собственный магнитный момент**. Электрон можно рассматривать как частицу, вращающуюся вокруг собственной оси. При таком вращении возникает собственный момент импульса. Можно ввести четвертое квантовое число (**спиновое**) – m_s , которое характеризует проекцию собственного момента импульса электрона на направление внешнего магнитного поля.

$$(L_s)_z = m_s \hbar, \quad (90)$$

где L_s - собственный момент импульса электрона. Квантовое число m_s может принимать только два значения $m_s = \pm 1/2$. В 1921 Штерн и Герлах опытным путем обнаружили пространственное квантование. Опыты ставились для определения магнитных моментов атомов первой группы таблицы Менделеева. В нормальном состоянии у этих атомов орбитальные механические и магнитные моменты всех электронов, кроме одного – внешнего, скомпенсированы. Было установлено, что, попадая в сильное неоднородное магнитное поле, пучок атомов раздваивается. Так как в этом случае внешний электрон находит-

ся в состоянии с $n=1$ и $l=0$, раздвоение пучка объясняется различными ориентациями в магнитном поле собственного магнитного момента импульса электрона: либо параллельно, либо антипараллельно полю. Таким образом опыты доказали пространственное квантование спина. Впоследствии эксперименты с атомами в более высоких энергетических состояниях показали, что квантуется также и орбитальный момент импульса электрона.

Принцип Паули: в атомной системе не может быть двух электронов с одинаковым набором четырех квантовых чисел.

Найдем, исходя из этого принципа, количество электронов, находящихся в состоянии при данном значении главного квантового числа n . Так как магнитное квантовое число имеет $2l+1$ значение, спиновое - 2 значения, а орбитальное квантовое число меняется от 0 до $n-1$, то искомое количество электронов равно

$$2n \sum_{l=0}^{l=n-1} (2l+1) = 2n \frac{1 + [2(n-1)+1]}{2} = 2n^2.$$

Из принципа Паули следует, что на одной атомной орбитали с соответствующими n , l и m могут находиться максимум два электрона с $m_s = +\frac{1}{2}$ и $m_s = -\frac{1}{2}$.

Многоэлектронные атомы. Чтобы построить многоэлектронный атом, нужно последовательно заселить все электронные уровни, начиная с наиболее близких к ядру.

Введем некоторые обозначения, которые помогут компактно записывать электронные состояния. Электроны с различными значениями l обозначаются следующим образом:

$$l = 0, 1, 2, 3 \dots$$

$$s \ p \ d \ f \dots$$

Комбинация главного квантового числа с буквой, характеризующей орбитальный момент импульса электрона, позволяет ***записывать*** состояния

электронов. Например, $2s$ ($n=2, l=0$); $4d$ ($n=4, l=2$). Электроны атома, имеющие одинаковое главное квантовое число, образуют слои: $n = 1$ – К-слой, $n = 2$ – L-слой, $n = 3$ – М-слой, $n = 4$ – N-слой и т.д.

Отметим, что у многоэлектронных атомов в отсутствие внешнего магнитного поля энергия электронов зависит только от квантовых чисел n и l и не зависит от m .

В 1869 г. Д.И. Менделеев открыл периодический закон изменения химических и физических свойств элементов в зависимости от их порядкового номера, который определяется числом электронов в атоме.

Проведем заполнение электронных состояний некоторых атомов в соответствии с принципом Паули (таблица 1).

Из таблицы видно, что сходство свойств элементов определяется характером заполнения электронных оболочек. Например, свойства инертных газов He , Ne , Kr или щелочных металлов Li , Na , K . Из таблицы также следует, что в некоторых случаях энергетически более выгодным оказывается заполнение последующих слоев при не полностью заполненных предыдущих (K , Ca), т.е. нарушается идеализированная схема заполнения орбиталей в соответствии с последовательно увеличивающейся энергией электронов.

В дальнейшем это явление удалось объяснить теоретически включением в рассмотрение взаимодействия электронов между собой и с полем ядра. Отметим, что квантовая механика дала теоретическое объяснение открытию Д.И. Менделеева.

Таблица 1

Номер элемента	Элемент	К- слой S-эл- ны	L		M			N			
			s	p	s	p	d	s	p	d	f
1	H	1									
2	He	2									
3	Li	2	1								
4	Be	2	2								
5	B	2	2	1							
10	Ne	2	2	6							
11	Na	2	2	6	1						
12	Mg	2	2	6	2						
18	Ar	2	2	6	2	6					
19	K	2	2	6	2	6		1			
20	Ca	2	2	6	2	2		2			
21	Sc	2	2	6	2	6	1	6			
36	Kr	2	2	6	2	6	10	2			

Лекция 8. Зонная теория твердых тел

В идеальном металлическом кристалле валентные электроны как газ заполняют пространство кристаллической решетки. Можно считать, что движение каждого электрона осуществляется в некотором периодическом поле, создаваемом неподвижными заряженными ионами и остальными электронами, т.е. в системе потенциальных ям. Результатом взаимодействия с

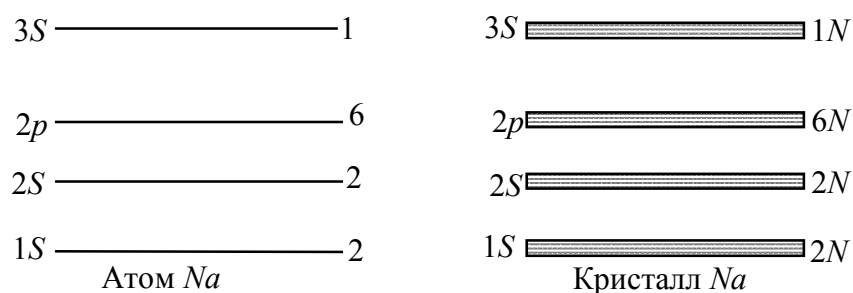


Рис.29

кристаллическим полем является расщепление каждого уровня энергии электрона на подуровни по числу таких ям. Эти подуровни расположены близко друг к другу и образуют энергетические зоны. На рис. 29 представлено образование энергетических зон электронов в кристалле *Na*, при этом каждый из *N* атомов натрия в кристалле рассматривается как потенциальная яма. Из рис. 29 видно, что в кристалле *Na* зона *3S* заполнена наполовину. Поэтому электроны могут

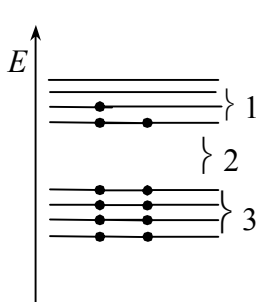


Рис.30

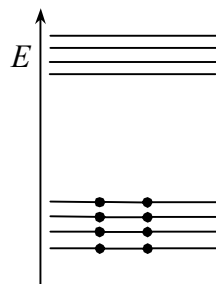


Рис.31

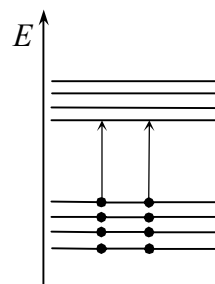


Рис.32

переходить с одного уровня на другой в пределах этой зоны. Энергетическая схема металла представлена на рис. 30. По принципу Паули на каждом уровне может быть не более 2 электронов. Переход электронов в пределах **зоны проводимости** (1) с одного уровня на другой обеспечивает хорошую проводимость металлов; (2) – **запрещенная зона**. У некоторых металлов **заполнен-**

ная зона (3) и зона проводимости перекрываются.

В диэлектриках (рис.31) ширина запрещенной зоны так велика, что никаким воздействием, нельзя перевести электроны в зону проводимости. Поэтому идеальный диэлектрик не проводит электрический ток. У полупроводника с собственной проводимостью (рис.32) ширина запрещенной зоны меньше. Под воздействием тепла или света электроны могут переходить в зону проводимости, создавая электронную проводимость (n -типа).

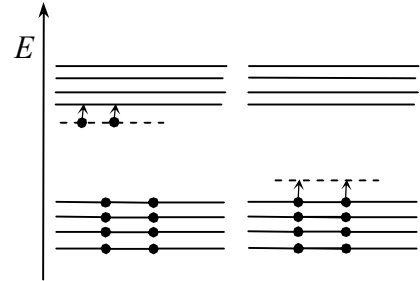


Рис.33

Рис.34

При переходе электронов в зону проводимости в заполненной зоне остаются вакансии-дырки. Переход электронов в заполненной зоне на место образовавшихся вакансий можно рассматривать как движение положительно заряженных дырок (проводимость p -типа). Таким образом, полупроводник с собственной проводимостью обладает двумя типами проводимости: n и p -типов. Проводимость одного типа можно получить в примесных полупроводниках. На рис. 33 представлена энергетическая схема полупроводника с проводимостью n -типа, а на рис. 34 – p -типа. В примесных полупроводниках с проводимостью n типа около зоны проводимости располагается энергетическая зона донорных примесей (пунктир). Электроны с донорных уровней переходят в зону проводимости даже при комнатной температуре, обеспечивая проводимость n - типа. При этом дырки в заполненной зоне не образуются.

В примесных полупроводниках с проводимостью p - типа происходит переход электронов из заполненной зоны на акцепторные уровни примеси. При этом электроны в зоне проводимости не появляются.

Квантовые статистики изучают системы, состоящие из большого числа частиц и подчиняющиеся законам квантовой механики. В отличие от классической, в квантовой механике одинаковые частицы неразличимы. При описании столкновения двух частиц говорят о вероятности их нахождения в области столкновения, ибо в квантовой механике нет понятия траектории. Это можно

записать следующим образом: $|\Psi(1,2)|^2 = |\Psi(2,1)|^2$, где волновая функция системы зависит от координат *обеих* частиц. Последнее равенство может выполняться, если $\Psi(1,2) = \Psi(2,1)$, или $\Psi(1,2) = -\Psi(2,1)$. В первом случае Ψ называют **симметричной**, во втором – **антисимметричной**. Иначе: волновая функция, системы из двух частиц либо симметрична, либо антисимметрична относительно перестановки этих частиц. Симметрия или антисимметрия волновой функции является свойством системы частиц одного сорта. В соответствии с этим частицы делятся на **бозоны** - частицы, описываемые симметричными волновыми функциями, и **фермионы** - частицы с антисимметричными волновыми функциями. Бозоны (фотоны, π - мезоны и т.д.) обладают целым спином. Фермионы (электроны, протоны, нейтроны) - полуцелым спином. Фермионы и бозоны совершенно по-разному себя ведут. Например, число бозонов, находящихся на одном энергетическом уровне, может быть любым, в то время как для фермионов выполняется принцип Паули. Система бозонов подчиняется квантовой статистике Бозе-Эйнштейна, система фермионов – статистике Ферми-Дирака.

Статистика Ферми-Дирака. Уровень Ферми. Статистике Ферми-Дирака подчиняются частицы со спином $1/2$. Для этих частиц справедлив принцип Паули – две частицы не могут находиться в одном и том же энергетическом состоянии. Рассмотрим металл при $T = 0$ К. На

рис. 35 изображена

так называемая потенциальная яма для валентных электронов в металле, т.е. зона проводимости металла со вписанными в нее энергетическими уровнями. Электроны будут заполнять наиболее низкие энергетические

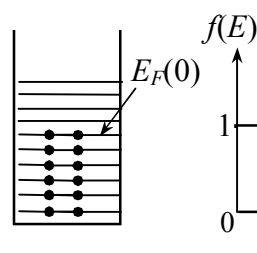


Рис.35

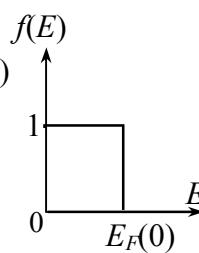


Рис.36

уровни, **верхний заполненный уровень называется уровнем Ферми** при абсолютном нуле температур (рис. 35), где $E_F(0)$ - **энергия Ферми**. Она специфична для каждого металла. На рис. 36 представлена функция распределения электронов по энергиям при $T=0$ К. Если температура металла отлична от 0 К, то элек-

троны обнаруживаются и на уровнях выше $E_F(0)$.

Функция распределения Ферми-Дирака имеет вид

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1}. \quad (91)$$

Если $E = E_F$, то $f(E) = 1/2$, т.е. при $T \neq 0$ уровень Ферми – это энергетический уровень, вероятность заполнения которого равна $1/2$ (рис. 37). Вероятность заполнения уровней с $E > E_F$, быстро уменьшается с ростом E , т.к.

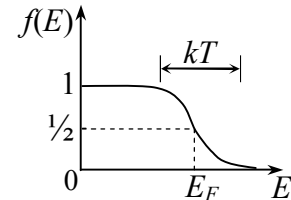


Рис.37

изменения функции распределения происходят в узком энергетическом диапазоне ($\sim kT$). Анализ формулы (91) показывает, что существует небольшая зависимость уровня Ферми от температуры.

В областях больших энергий $E - E_F \gg kT$ единицей в знаменателе формулы можно пренебречь и получить

$$f(E) = e^{-(E-E_F)/kT} = \text{const} \cdot e^{-E/kT}. \quad (92)$$

Последняя формула представляет собой распределение Больцмана классической физики. В большинстве полупроводников при комнатной температуре электронный газ подчиняется классической статистике, в то время как в металлах пользоваться классической статистикой нельзя даже при температуре плавления. В полупроводниках с собственной проводимостью уровень Ферми располагается посередине запрещенной зоны, а в примесных полупроводниках несколько смещен к соответствующим примесным уровням.

Работа выхода. Металл представляет для электронов проводимости потенциальную яму. Чтобы покинуть металл, электроны должны обладать энергией, достаточной для преодоления потенциального барьера на поверхности. Барьер обусловлен: а) тем, что случайное удаление электронов приводит к возникновению в металле избыточного положительного заряда; б) наличием электронного облака у поверхности. В итоге образуется так называемый *двойной слой*, в

котором на электроны действуют силы, направленные внутрь металла. Работа, совершаемая против этих сил, при удалении электрона из металла идет на увеличение потенциальной энергии электрона, т.е. потенциальная энергия электронов проводимости внутри металла меньше, чем вне металла на глубину ямы E_{no} . Потенциальная энергия электрона связана с потенциалом той точки, где находится электрон, формулой $E_n = -e\varphi$, т.е.

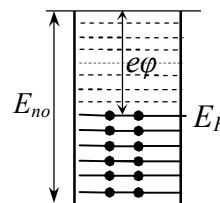


Рис.39

знаки E_n и φ противоположны. Следовательно, потенциал внутри металла больше, чем потенциал вблизи поверхности. Сообщение металлу положительного заряда приводят к увеличению потенциала как на поверхности, так и внутри металла, а следовательно, к уменьшению E_n , а сообщение отрицательного заряда уменьшает φ и увеличивает E_n . Для удаления электрона из металла ему нужно сообщить различную энергию в зависимости от того, на каком уровне он находится. Наименьшая энергия для удаления из металла необходима электронам уровня Ферми (рис. 39). Эта энергия называется **работой выхода**. Она равна

$$e\varphi = E_{n_0} - E_F.$$

Контактная разность потенциалов. Термоэлектричество. Если два металла привести в соприкосновение, то при хорошем электрическом контакте между ними возникнет разность потенциалов, которую называют **контактной**. Рассмотрим графики потенциальной энергии двух металлов 1 и 2 до установления между ними контакта (рис. 40, а) и после (рис. 40, б). Пусть уровень Ферми в металле 1 лежит выше, чем в металле 2. Тогда при контакте электроны с верхних уровней 1 будут переходить на более низкие свободные уровни 2. При этом 1 зарядится положительно, а 2 – отрицательно, поэтому потенциальная энергия электронов в 1 уменьшается, а в 2 увеличивается. Условие равновесия при контакте - одинаковое положение уровней Ферми. При этом имеют место два скачка потенциала:

1] потенциальная энергия электронов вблизи 1 на $e\varphi_2 - e\varphi_1$ меньше, чем вблизи 2. Следовательно, потенциал у 1 будет больше, чем у 2 на величину

$$U_{12} = \frac{e\varphi_2 - e\varphi_1}{e} = \varphi_2 - \varphi_1,$$

где U_{12} - внешняя контактная разность потенциалов.

2] между внутренними точками возникает внутренняя контактная разность потенциалов

$$U'_{12} = \frac{E_{F1} - E_{F2}}{e}.$$

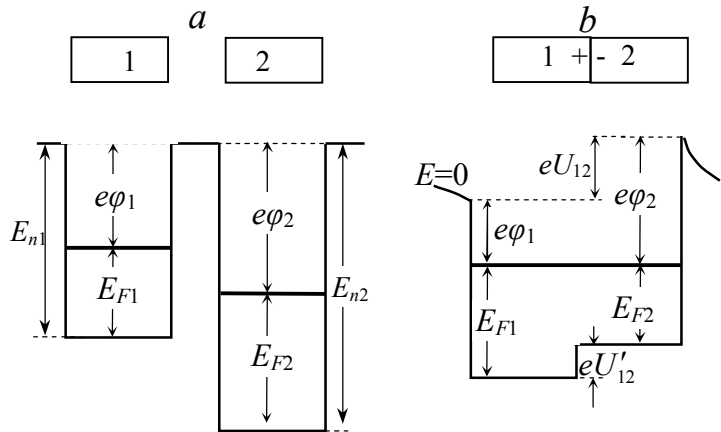


Рис.40

Наличие внутренней контактной разности потенциалов объясняет **термоэлектрические явления**. Рассмотрим цепь, состоящую из двух металлов A и B при наличии спаев 1 и 2 (рис. 41). Пусть температуры спаев различны: $T_1 \neq T_2$. Опыт показывает, что в такой системе возникает термоэлектродви-

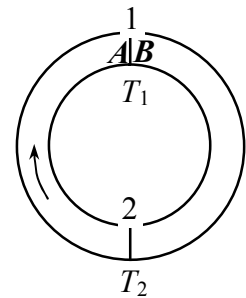


Рис. 41

жущая сила и протекает ток (эффект Зеебека). На явлении термоэлектричества основано измерение температуры **термопарами**, которые представляют собой спай двух металлов. Термопара константан-медь имеет $\varepsilon_{\text{дс}} = 20 \text{ мВ}$ при $\Delta T = 500 \text{ К}$.

p-n переход возникает на границе двух полупроводников с различным типом проводимости вследствие диффузии носителей тока через контакт. В каждом полупроводнике с примесной проводимостью наряду с основными носителями, определяющими тип проводимости, имеется небольшое количество неосновных носителей противоположного знака.

Энергетически схема двух полупроводников с различной проводимостью, находящихся в контакте, представлена на рис. 42. Как и в случае контакта ме-

таллов при контакте полупроводников (вертикальная линия) уровень Ферми располагается на одинаковой высоте. Изгибание границ, энергетических зон обусловлено различными потенциалами областей с различной проводимостью в состоянии равновесия. Верхняя граница основной зоны (1)

дает

ход потенциальной энергии электронов, 2 – зона проводимости для электронов.

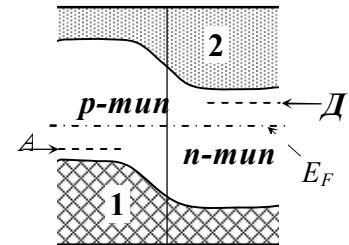


Рис. 42

На рис. 43 представлена схема контакта двух полупроводников с различными типами проводимости

(рис.43, а), при подключении контакта в пропускном (рис.43, б) и запиорном направлениях (рис.43, в).

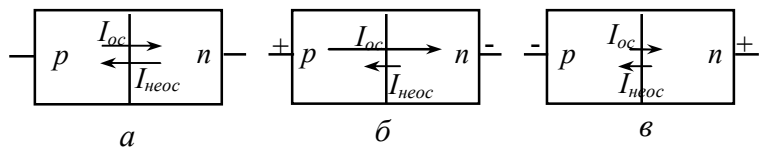


Рис.43

При контакте двух полупроводников в отсутствие внешнего напряжения ток

основных носителей ($I_{ос}$) мал, так как трудно преодолеть потенциальный барьер, а ток неосновных носителей ($I_{неос}$), беспрепятственно проходящих через потенциальный барьер, мал так как их очень мало. При подключении напряжения, как показано на рис. 43, б, происходит уменьшение высоты потенциального барьера и его ширины. Это приводит к значительному увеличению тока основных носителей. Ток неосновных носителей по-прежнему мал из-за их малого количества. Такое подключение напряжения называется пропускным.

Подключение напряжения (рис. 43, в) - запиорное. При этом происходит увеличение высоты потенциального барьера и его ширины. Ток основных носителей становится даже меньше, чем без подключения напряжения. Полупроводниковые выпрямители, работа которых основана на односторонней проводимости p - n перехода, дают некоторый ток при отрицательных значениях напряжения, при больших обратных напряжениях происходит пробой, ток при этом

возрастает. **Лекция 9. Вынужденное излучение. Лазеры**

Вынужденное излучение. В основе создания оптических квантовых генераторов (лазеров) лежит возможность существования двух различных процессов испускания излучения атомами. Рассмотрим два энергетических уровня в некоторой атомной системе (рис. 44). Переход атома из одного энергетического состояния в другое совершается скачком и при этом поглощается или испускается квант излучения, величина которого

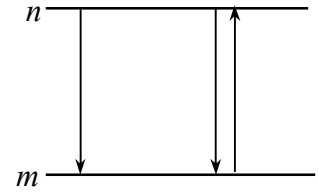


Рис.44

$$\hbar\omega = E_n - E_m. \quad (93)$$

Поглощая энергию, атом переходит на более высокий энергетический уровень. В дальнейшем возможны два процесса: самопроизвольное возвращение атома в более низкое энергетическое состояние (это – **спонтанный** переход) или, возвращение атома в исходное состояние может быть спровоцировано встречей с фотоном, энергия которого равна разности (93). В последнем случае переход называется **вынужденным**, а фотон, испущенный атомом, оказывается в точности таким же, как и налетевший. Таким образом, после взаимодействия атома с первичным фотоном в одном направлении летят уже два одинаковых фотона.

Рассмотрим атомную систему, состоящую из **большого числа возбужденных атомов**. Появление в этой системе фотона с энергией (93) инициирует лавинообразное рождение вторичных фотонов, летящих в заданном первичным фотоном направлении. Получение такой лавины и является основной идеей генерации когерентных пучков излучения, т.е. лазерной генерации. Для возникновения как можно большего числа вторичных фотонов нужно, чтобы большая часть атомов вещества, называемого **активной средой**, находились в возбужденном состоянии (на рис. 44, в состоянии с энергией E_n). Такое необычное состояние называется **инверсной населенностью** и является неравновесным, а перевод системы в это состояние – **накачкой**. Если в активной среде создана

инверсная населенность, то любой фотон с энергией равной разности энергий уровней n и m , вызывает лавинообразные переходы на нижележащий уровень, в ходе которых формируется лазерный луч. Направленность излучения и его усиление достигаются тем, что активная среда

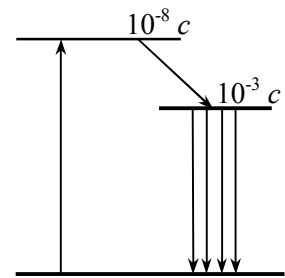


Рис.45

помещается между двумя зеркалами с общей оптической осью, одно из которых делается полупрозрачным. Такая система называется **оптическим резонатором**.

Впервые принцип усиления света за счет вынужденного излучения был предложен советским ученым Фабрикантом в 1940 г. Первые усилители, работающие в диапазоне сантиметровых волн (мазеры), были созданы в 1953 г. советскими физиками Басовым и Прохоровым и, независимо от них, американскими физиками Таунсом и Вебером.

Твердотельные лазеры. Рассмотрим энергетическую схему рубинового лазера. Рубин – это окись алюминия (Al_2O_3) с ионами хрома в качестве примеси. На рис. 45 представлены энергетические уровни ионов хрома, которые и являются рабочими для создания лазерного излучения. Генерация осуществляется по 3-х уровневой схеме. Кроме основного и возбужденного уровней в системе существует еще и промежуточный третий уровень – **метастабильный**, время жизни которого значительно больше ($\sim 10^{-3}$ с), чем в возбужденном ($\sim 10^{-8}$ с). В результате на метастабильном уровне накапливаются многие атомы, чем и создается инверсная населенность. Для оптической накачки используется ксеноновая лампа-вспышка, работающая в импульсном режиме. При поглощении энергии лампы ионы Cr^{+++} переходят в возбужденное состояние, время жизни в котором порядка 10^{-8} с. Из этого состояния происходит переход на метастабильный уровень. При таком переходе часть энергии отдается кристаллической решетке. Инверсная заселенность создается за счет разницы времени жизни возбужденного и метастабильного уровней. Любой самопроизвольный переход с метастабильного уровня на основной ($\lambda=694,3$ нм) вызывает лавинообразные переходы с такой же длиной волны.

Лекция 10. Строение атомных ядер. Радиоактивность. Фундаментальные взаимодействия

Строение атомных ядер. Атомные ядра состоят из протонов и нейтронов, которые называются **нуклонами**. Заряд протона $q_p = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$, масса $m_p = 1836 m_e$, где m_e – масса электрона; заряд нейтрона $q_n = 0$, его масса равна $m_n = m_p + 2,5 m_e$. В свободном состоянии нейтрон нестабилен и распадается на протон, электрон и антинейтрино. Протон и нейтрон – фермионы, т.е. их спины равны $m_s = \pm 1/2$. Свободные протоны и нейтроны подчиняются

статистике Ферми-Дирака, к ним применим принцип Паули. Если число частиц в ядре четное, то оно имеет целочисленный спин и подчиняется статистике Бозе-Эйнштейна. В случае нечетного числа частиц, ядро обладает полуцелым спином и описывается статистикой Ферми-Дирака.

Атомное ядро принято обозначать ${}_Z X^A$, где X – символ элемента по таблице Менделеева; Z – количество протонов в ядре (зарядовое число, номер элемента в таблице Менделеева); A – суммарное число нуклонов (т.е. протонов и нейтронов) в ядре (массовое число). Таким образом, число нейтронов в ядре равно $A - Z$. Ядра, для которых Z одинаково, а число нейтронов различно, называются **изотопами**. Например, изотопы водорода: ${}_1 H^1 [Z=1, A-Z=0]$, ${}_1 H^2 [Z=1, A-Z=1]$ – тяжелый водород (дейтерий), ${}_1 H^3 [Z=1, A-Z=2]$ – сверхтяжелый водород (тритий). Изотопы одного элемента обладают одинаковыми химическими свойствами и не могут быть разделены химическим путем.

Энергия связи нуклонов. Между нуклонами ядер существует связь. Энергия, которую нужно затратить, чтобы разделить ядро на невзаимодействующие нуклоны, называется **энергией связи** ($E_{св}$). Измерения показали, что масса ядра ($m_{я}$) меньше суммы масс образующих его нуклонов на Δm :

$$\Delta m = [Z \cdot m_p + (A - Z) m_n] - m_{я} > 0 \quad (94)$$

Эта величина называется **дефектом массы**. Сам факт наличия дефекта массы

можно понять, вспомнив соотношение между массой и энергией, полученное в теории относительности

$$E = mc^2. \quad (95)$$

Если уменьшается масса системы, то уменьшается (выделяется) энергия и наоборот, т.е.

$$\Delta E = c^2 \cdot \Delta m. \quad (96)$$

Значит, при образовании ядер из нуклонов выделяется энергия $\Delta E = E_{св}$. Подставив (96) в (94), получим

$$E_{св} = c^2 \{ [Zm_p + (A - Z) m_n] - m_{я} \} \quad (97)$$

Важной характеристикой ядер является **удельная энер-**

гия связи $\frac{E_{св}}{A}$, (энергия связи, приходящаяся на один

нуклон). Зависимость удельной энергии связи от массового числа A (рис. 52) показывает, что наибольшей

энергией связи обладают ядра элементов, находящихся в середине таблицы Менделеева, поэтому энергетиче-

ски выгодны два процесса: 1) деление тяжелых ядер; 2) объединение легких ядер – термоядерная реакция. В ходе этих процессов должно выделяться большое количество энергии.

Нуклоны ядра связаны особым видом взаимодействия, которое называется **сильным**. Сильное взаимодействие характеризуется следующими особенностями.

1. Короткодействие: «работает» на расстояниях не больших 10^{-15} м.

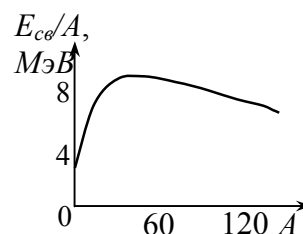


Рис.52

2. Зарядовая независимость: взаимодействие между нуклонами не зависит от их зарядов.
3. Зависимость от ориентации спинов нуклонов. Например, ядро тяжелого водорода может образоваться только при параллельных спинах протона и нейтрона.
4. Не направлено вдоль прямой, соединяющей центры нуклонов.
5. Насыщение. Каждый нуклон в ядре взаимодействует с определенным числом нуклонов.

Фундаментальные взаимодействия. Всего существует 4 типа фундаментальных взаимодействий: *сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное*. Эти взаимодействия можно сравнить по интенсивности, например, скорости, или вероятности, связанных с ними процессов. Для сравнения можно взять скорости при характерной энергии сталкивающихся частиц около 1 ГэВ. Сравнительные характеристики этих 4-х типов взаимодействий представлены в таблице.

взаимодействия, как уже отмечалось, удерживают нуклоны в ядре. Они присущи большинству адронов (протон, нейтрон, гипероны, мезоны и др.). Эти взаимодействия короткодействующие: на расстояниях свыше 10^{-15} м они прекращаются, поэтому сильные взаимодействия не могут привести к структурам макроскопических размеров.

1. Сильные

2. **Электромагнитные взаимодействия** осуществляются посредством электромагнитного поля. Они значительно слабее сильных, но вследствие неограниченности их радиуса действия, именно они оказываются главным структурообразующим фактором. Именно эти силы вызывают разлет осколков при делении атомных ядер; именно они ответственны за большинство оптических, механических, тепловых и химических явлений.

Взаимодействие	Интенсивность	Длительность Процессов, с	Радиус действия, <i>м</i>
Сильное	1	10^{-23}	10^{-15}
Электромагнитное	10^{-2}	10^{-20}	∞
Слабое	10^{-14}	10^{-9}	10^{-18}
Гравитационное	10^{-31}	-	∞

3. **Слабые взаимодействия** являются универсальными и весьма малыми по сравнению с сильными и электромагнитными. Они присутствуют во всех взаимодействиях.

4. **Гравитационные взаимодействия** имеют место между любыми материальными частицами. По сравнению с другими видами это самые слабые взаимодействия, в физике элементарных частиц ими можно пренебречь практически всегда.

В настоящее время считают, что взаимодействие между нуклонами осуществляется путем обмена особыми частицами, которые не могут быть обнаружены за время их существования в данном процессе. Такие частицы называются **виртуальными**. Процессы, в которых они участвуют (виртуальные процессы или виртуальные переходы), представляют собой способ описания реальных внутриядерных взаимодействий.

В конце 40-х годов XX в. было установлено, что носителями ядерных сил являются виртуальные π -мезоны. Реальные элементарные частицы π -мезоны были обнаружены в космическом излучении. Различают π^- , π^0 и π^+ - мезоны. Заряд $\pi^\pm$ -мезонов равен элементарному заряду e . Массы $m_{\pi^+} = m_{\pi^-} = 273m_e$, $m_{\pi^0} = 264m_e$. В реальных процессах все три частицы нестабильны, т.е. распадаются через определенное время, называемым **временем жизни**. Время жизни π^+ и π^- -мезонов $2,60 \cdot 10^{-8}$ с, а π^0 -мезона — $0,8 \cdot 10^{-8}$ с.

В ходе виртуальных процессов внутри ядра происходят следующие превращения:

$$p \leftrightarrow n + \pi^+, \quad n \leftrightarrow p + \pi^-, \quad p \leftrightarrow p + \pi^0, \quad n \leftrightarrow n + \pi^0.$$

Таким образом, поле ядерных сил, в котором находится нуклон, можно рассматривать как облако виртуальных π -мезонов. Нуклоны взаимодействуют поглощая и испуская π -мезоны. Одна из возможных схем обмена нуклонов π -мезонами имеет вид:

$$p + n \leftrightarrow n + \pi^+ + n \leftrightarrow n + p$$

Такой процесс подтвержден экспериментально при рассеянии нейтронов на водороде.

Лекция 11. Модели ядра. Закон радиоактивного распада. Ядерные реакторы. Элементарные частицы

Модели ядра. Существуют многочисленные ядерные модели, которые отражают различные особенности ядерных взаимодействий и являются упрощенными подходами к описанию строения атомного ядра.

Одной из первых, в конце 30-х годов XX века возникла **капельная модель**, в основу которой была положена аналогия между ядром и каплей жидкости. Например, известно, что для не слишком легких и не слишком тяжелых ядер отношение $E_{сб}/A$ примерно одинаково и составляет $\cong 8$ МэВ. Для всякой жидкости энергия межмолекулярной связи, приходящаяся на одну единицу, также почти не зависит от размеров капли.

Радиус действия межмолекулярных сил в жидкостях по порядку величины близок к среднему расстоянию между частицами. Радиус действия внутриядерных сил также по порядку величины близок к расстоянию между нуклонами и т.д.

В капельной модели атомные ядра уподобляют каплям нейтронно-протонной жидкости с постоянной плотностью. Таким образом можно хорошо

описать деление ядер, процесс выброса из ядер частиц при ядерных превращениях, посчитать энергию связи ядер и др.

Оболочечная модель названа так по аналогии с атомной моделью оболочек. Согласно этой модели нуклоны движутся почти независимо в поле, создаваемом самими нуклонами. Нуклоны в ядре находятся в определенных энергетических состояниях, т.е. подобно электронам в атоме образуют определенные оболочки и подоболочки. В ядре существуют две системы нуклонных состояний – протонная и нейтронная, которые заполняются независимо. Наиболее устойчивы ядра, у которых числа нейтронов или протонов равны «магическим»: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 и 152. Ядра, у которых «магическим» является и число протонов и число нейтронов, называются дважды

«магическими»: ${}^4_2\text{He}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}$, ${}^{208}_{82}\text{Pb}$.

Аналитический вид потенциала, в котором движутся нуклоны в конкретном ядре, вносит каждый раз изменения в оболочечную модель. С помощью этой модели можно объяснить существование магических чисел, устойчивость атомных ядер, сосчитать величины спинов, магнитных и квадрупольных моментов основных состояний ядер.

До сих пор сохраняет свое значение и самая старая ядерная модель – **модель нуклонных ассоциаций**. Согласно этой модели ядро – система ассоциатов определенного типа. В простейшем случае ядра состоят из ассоциатов α -частиц. Это в основном ядра с равным и четным числом нейтронов и протонов: Be^8 , C^{12} , O^{16} и т.д. модель используется для описания ядерных реакций.

Закон радиоактивного распада. *Естественная радиоактивность* была открыта в 1896 г. Беккерелем. Было установлено, что ядра урана могут претерпевать превращения, испуская α - (ядра гелия), β - (электроны) и γ - лучи (электромагнитные волны длиной волны не более $1 \text{ \AA}$). Превращение ядер при этом происходит самопроизвольно и подчиняется статистическим закономерностям. Мерой быстроты превращений является **период полураспада** (T) - время, в течение которого распадается половина первоначально существовавших ядер. **Постоянной радиоактивного распада** (λ) называется вероятность того, что отдельный атом испытывает радиоактивное превращение в единицу времени. Количество ядер dN , распадающихся за время dt можно представить формулой

$$-dN = \lambda N dt, \quad (98)$$

где N - число ядер к началу отсчета времени dt , знак $(-)$ означает уменьшение количества ядер с течением времени. Разделяя переменные, интегрируя и потенцируя, получаем

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt, \Rightarrow \int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt,$$

где N_0 - первоначальное количество ядер.

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t, \Rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}, \Rightarrow$$

$$\boxed{N = N_0 e^{-\lambda t}} \quad (99)$$

Последняя формула – математическая запись закона радиоактивного распада. Отметим, что N - число ядер, оставшихся по прошествии времени t . Положим в формуле (99) $t=T$, тогда

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda T},$$

при этом $\frac{N}{N_0} = \frac{1}{2}$ по определению T . Тогда $\lambda T = -\ln \frac{1}{2} = \ln 2$; и

окончательно

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}, \quad (100)$$

т.е. период полураспада обратно пропорционален λ .

Схематически радиоактивные превращения (α, β, γ -распады) можно представить с помощью так называемых правил смещения.

α -распад: ${}_Z X^A \rightarrow {}_2 He^4 + {}_{Z-2} Y^{A-4}$,

где Y - новое ядро.

При составлении этой схемы учтено, что в процессе радиоактивных превращений имеет место закон сохранения заряда и масс. Так как левый нижний индекс ядра определяет положение атома в таблице Менделеева, то в результате α -распада новое ядро смещается на две клетки к началу таблицы по сравнению с исходным.

β -распад обусловлен превращениями нуклонов внутри ядра. Существуют три вида β -распада: β^+ -распад, β^- -распад и К-захват. При β^- распаде происходит распад нейтрона: ${}_0 n^1 \rightarrow {}_{+1} p^1 + {}_{-1} \beta^0 + \tilde{\nu}$, где $\tilde{\nu}$ - антинейтрино (особая частица). Вылет электрона приводит к увеличению зарядового числа на единицу, и новое ядро смещается на одну клетку к концу таблицы Менделеева:

$${}_Z X^A \rightarrow {}_{-1} \beta^0 + {}_{Z+1} Y^A.$$

При β^+ -распаде в ядре происходит превращение протона: $p \rightarrow n + e^+ + \nu$, в результате чего вылетает позитрон β^+ (или "положительный электрон" e^+) и сдвиг происходит в сторону начала таблицы Менделеева:

$${}_Z X^A \rightarrow {}_{+1} \beta^0 + {}_{Z-1} Y^A.$$

К-захват происходит, если ядро захватывает один из электронов электронной оболочки атома (обычно из К-оболочки). На освободившееся место в К-оболочке переходит электрон из другой оболочки, поэтому К-захват всегда сопровождается характеристическим рентгеновским излучением.

γ -распад. При γ -распаде новое ядро не образуется:

$$X^* \rightarrow X + \gamma,$$

где * - означает возбужденное состояние ядра. Этот вид распада заключается в испускании возбужденным ядром γ -кванта и возвращении ядра в нормальное состояние.

Представим себе, что в результате радиоактивного превращения некоторых ядер A образуются в свою очередь радиоактивные ядра B , которые превращаются в ядра C . Тогда в соответствии с (99) можно написать:

$$(dN_B)_{\text{возник.}} = (dN_A)_{\text{распад.}} = \lambda_A N_A dt$$

$$-(dN_B)_{\text{распад.}} = \lambda_B N_B dt$$

При так называемом радиоактивном равновесии

$$(dN_B)_{\text{возник.}} = - (dN_B)_{\text{распад.}}$$

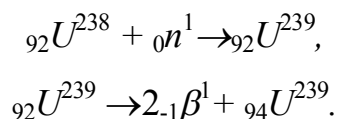
т.е.

$$\lambda_A N_A = \lambda_B N_{OB}, \quad (101)$$

где N_{OB} - число ядер B при радиоактивном равновесии. По формуле (101), зная одну из постоянных распада, можно найти другую, если известно N_A и N_{OB} . При радиоактивном равновесии количество радиоактивных продуктов распада остается неизменным до тех пор, пока заметно не уменьшается количество ма-

теринского вещества. Например, в 1 г радия ежесекундно распадается $3,7 \cdot 10^{10}$ ядер. Это число распадов принимают за единицу активности - Кюри (Ku). В Международной системе единиц единицей активности является беккерель (Bk), соответствующий 1 распаду в 1 с. $1 Bk = 27 nKu$.

Деление тяжелых ядер. Природный уран состоит на 99,3 % из изотопа ${}_{92}U^{238}$ и 0,7 % ${}_{92}U^{235}$. Установлено, что ${}_{92}U^{235}$ под действием как быстрых, так и медленных (тепловых) нейтронов может разделиться на два осколка. Это деление обычно сопровождается выбросом от 1 до 3 нейтронов и β - и γ -излучением осколков. При этом выделяется большая энергия (200 МэВ на каждое распадающееся ядро урана). Нейтроны, выброшенные из ядра урана, взаимодействуя с соседними ядрами, в свою очередь вызывают в них реакцию деления и т.д. Происходит лавинообразное нарастание числа актов деления. Такая реакция деления называется **цепной**. U^{238} может делиться только под действием быстрых нейтронов с энергией не менее 1 МэВ и к тому же вероятность деления мала. Поэтому для практических целей обычно используют или U^{235} , или природный уран, обогащенный этим изотопом. Ядра атомов, которые могут делиться под действием медленных нейтронов, называются активно делящимися (U^{235} , U^{233} , Pu^{239}). Быстрота развития цепной реакции характеризуется коэффициентом размножения нейтронов (K) - среднее отношение нейтронов некоторого поколения к количеству нейтронов предыдущего поколения с учетом всех потерь нейтронов. Для стационарного течения цепной реакции $K=1$, при $K=1,01$ практически мгновенно происходит взрыв. Важной характеристикой активно делящегося вещества является **критическая масса** - минимальная масса вещества, при которой идет цепная реакция. Она различна в зависимости от геометрической формы вещества, так как чем больше площадь поверхности, тем больше нейтронов будет уходить через поверхность и не участвовать в цепной реакции. Для чистого ${}_{92}U^{235}$, имеющего форму шара (наименьшая поверхность), $m_{кр} = 50$ кг. ${}_{92}U^{238}$ может быть использован для получения активно делящегося Pu^{239} по схеме



Ядерные реакторы. Управляемая цепная реакция деления осуществляется в устройствах, которые называются **ядерными реакторами**. На рис.53. приведена схема уран-графитового реактора.

1. Защитная оболочка
2. Регулирующие стержни
3. Замедлитель
4. Тепловыделяющие элементы (ТВЭ-
5. Отражатель

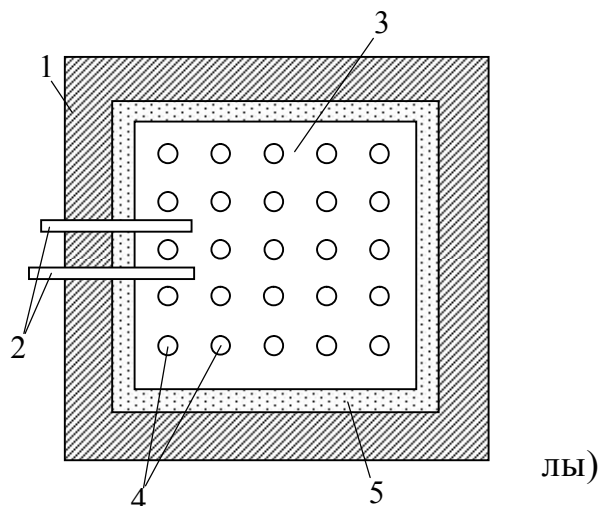


Рис.53

В ядерном реакторе в качестве горючего вещества используется природный (иногда обогащенный изотопом U^{235}) уран. Ядерное горючее

располагается внутри тепловыделяющих элементов (ТВЭлов). ТВЭлы собираются по несколько штук в пакеты (4), которые размещаются на некотором расстоянии друг от друга. Промежутки между пакетами заполняют замедлителем (3) – веществом с малым атомным весом, служащим для снижения энергии быстрых нейтронов. Таким веществом может быть графит, бериллий, тяжелая вода (D_2O). В результате многократных соударений с ядрами замедлителя нейтроны теряют свою энергию до тех пор пока не войдут в тепловое равновесие со средой.

Для регулирования цепной реакции деления в активную зону реактора помещают стержни (2) из вещества, интенсивно поглощающего нейтроны (В, Cd, Eu). Введение стержней в реактор уменьшает коэффициент размножения нейтронов, а выведение – увеличивает.

Отражатель (5), окружающий активную зону, снижает утечку нейтронов из зоны и позволяет уменьшить величину критической массы. Обычно отражатель сделан из того же материала, что и замедлитель. Снижение ядерного излучения снаружи

реактора осуществляется за счет защитной оболочки (1), состоящей, например, из бетона.

Взаимодействие радиоактивного излучения с веществом. Потеря энергии α - и β -частицами при прохождении через вещество связана с процессом ионизации нейтральных атомов и молекул. Часть энергии α - и β -частицы затрачивают на возбуждение атомов (переходы электронов на высележащие энергетические уровни), следствием чего является испускание квантов видимого, ультрафиолетового или рентгеновского излучения.

При сравнимых энергиях частиц ионизация, производимая β -частицами, примерно в 100 раз меньше ионизации, производимой α -частицами. Пробег β -частиц в веществе примерно в 100 раз больше.

Для β -частиц с энергией в 2 МэВ полностью задерживающими оказываются слои воздуха ~8м, воды ~1 см, свинца ~1 мм.

Потеря энергии γ -лучами связана с фотоэффектом, эффектом Комптона и эффектом образования электронно-позитронных пар. В последнем случае при торможении γ -кванта образуется электрон ($_{-1}\beta^0$) и позитрон ($_{+1}\beta^0$). Эффект Комптона - основной процесс при средней энергии от 0,3 до 5 МэВ. При меньших энергиях возрастает вероятность фотоэффекта, при больших становится вероятнее образование электронно-позитронных пар.

В результате в облучаемой среде возникает большое количество движущихся электронов, часть которых обладает достаточной энергией для ионизации. Количественной характеристикой энергии ионизирующего излучения, основанной на ионизации сухого воздуха при атмосферном давлении является **экспозиционная доза**. Единицей ее является **рентген**

$$1P = 2 \cdot 10^9 \frac{\text{пар ионов}}{\text{см}^3 \text{воздуха}} = 0,11 \cdot 10^{-1} \text{ Дж/м}^3.$$

Такая доза накапливается за 1 час на расстоянии 1 м от радия массой 1 г. Количество энергии, поглощенной единицей массы вещества, характеризуется **поглощенной дозой**. Единицей ее является **рад**. 1 рад = 10^{-2} Дж/кг. В СИ

единицей является Грей. $1 \text{ Гр} = 10^2 \text{ рад} = 1 \text{ Дж/кг}$.

Отметим что ионизирующим действием на вещество обладают не только α -, β -, и γ -излучения, но и, например, **нейтронное излучение**. Источником нейтронов могут являться ядерные реакторы, циклотроны и т.д. Сам нейтрон ионизацию не вызывает, но при столкновении с протоном последний может получить энергию нейтрона и стать сильно ионизирующей частицей.

Биологическое действие радиоактивного излучения. Отрицательное воздействие ионизирующего облучения известно с 1895 г. В 1898 г. Беккерель получил сильный ожог кожи от излучения радия. Ионизация приводит к изменению химического строения живого организма, что приводит к вредным клиническим или генетическим последствиям. Различные виды радиоактивного облучения при одной и той же поглощенной дозе по-разному влияют на биологические объекты. Поэтому вводится коэффициент относительной биологической эффективности (ОБЭ) - численный

130

коэффициент, который равен отношению поглощенной дозы эталонного излучения, вызывающего определенный радиобиологический эффект, к дозе рассматриваемого облучения, вызывающего тот же биологический эффект.

ОБЭ для β - и γ -излучения равны 1, для протонов и нейтронов - 10, α -частиц - 20. Следовательно, для характеристики воздействия ионизирующего облучения нужно ввести не только характеристику, отражающую поглощенную дозу, но и ОБЭ. Такой характеристикой являются **эквивалентная доза**, равная их произведению. Единицей ее является биологический эквивалент рада - $1 \text{ бэр} = 1 \text{ рад} \cdot \text{ОБЭ}$. В СИ единицей эквивалентной дозы является *Зиверт* - $1 \text{ Зв} = 100 \text{ бэр}$.

Воздействие ионизирующего облучения существенно зависит от проникающей способности. Например, α -частицы практически не способны проникнуть через наружный слой кожи. Поэтому они не представляют собой опасности до тех пор, пока не попадут внутрь организма через рану, с пищей или с вдыхаемым воздухом, β -частицы проникают в ткани организма на 1-2 см, γ -лучи пронизы-

вают тело человека. Международная комиссия радиационной защиты рекомендовала в качестве предельно допустимой дозы

разового аварийного облучения 25 бэр, допустимая доза облучения населения в год 500 мбэр (0,06 мбэр/ч). Для сравнения отметим, что фоновое облучение в год составляет 100 мбэр (0,011 мбэр/ч), облучение при рентгенографии зубов 3 бэр.

Элементарные частицы. Ранее считалось, что элементарными являются частицы, которые нельзя разложить на составные части. Однако выяснилось, что некоторые частицы обладают внутренней структурой. Массы большинства элементарных частиц имеют порядок величины массы протона – $1,6 \cdot 10^{-27}$ кг. Размеры элементарных частиц по порядку величины составляют от 10^{-15} м – у протонов, нейтронов, π - и К-мезонов, до 10^{-18} м и меньше у электронов, мюонов и др. Свойства элементарных частиц представлены в таблице 2.

Элементарные частицы являются квантовыми микрообъектами и их поведение определяется квантово механическими закономерностями. Можно сказать, что элементарные частицы – это кванты соответствующих физических полей, т.к. они способны испускаться и поглощаться в актах взаимодействия с другими частицами.

Таблица 2

Частица		Сим- вол	Масса, ед. m_e	Заряды					Спин	Среднее время жизни, c	Основные схемы рас- пада частицы		
				Q	L_e	L_μ	L_τ	B					
Фотон		γ	0	0	0	0	0	0	1				
Лептоны	Нейтрино	$\nu_e \quad \tilde{\nu}_e$	0	0	+1	0	0	0	1/2	Стаб.	$e^- \quad \nu_\mu \quad \tilde{\nu}_e$ $\mu^- \quad \nu_\tau \quad \tilde{\nu}_\mu ;$ $e^- \quad \tilde{\nu}_e \quad \tilde{\nu}_\tau$		
		$\nu_\mu \quad \tilde{\nu}_\mu$	0	0	0	+1	0	0	1/2	Стаб.			
		$\nu_\tau \quad \tilde{\nu}_\tau$	0	0	0	0	+1	0	1/2	?			
	Электрон	$e^- \quad e^+$	1	-1	+1	0	0	0	1/2	стабилен			
		Мюон	$\mu^- \quad \mu^+$	207	-1	0	+1	0	0	1/2		$2,2 \cdot 10^{-6}$	
	Таон	$\tau^- \quad \tau^+$	3487	-1	0	0	+1	0	1/2	$3,5 \cdot 10^{-12}$			
	Мезоны	π -мезоны	π^0	264	0	0			0	0		$0,8 \cdot 10^{-16}$	$\gamma \gamma$ $\mu^+ \nu_\mu$
			$\pi^+ \quad \pi^-$	273	+1	0			0	0		$2,6 \cdot 10^{-8}$	
К-мезоны		$K^+ \quad K^-$	974	+1	0			0	0	$1,2 \cdot 10^{-8}$	$\mu^+ \nu_\mu, \pi^+$ π^0		
		$K^0 \quad \tilde{K}_0$	966	0	0			0	0	$5,8 \cdot 10^{-8}$			
η -мезон		η	1074	0	0			0	0	$2,4 \cdot 10^{-19}$	$\pi \mu \nu_\mu$		
ϕ -мезон		ϕ	2040	0	0			0	1	10^{-19}	$\pi^+ \pi^-$		

Барионы	Протон	$p \quad \bar{p}$	1836,2	+1	0	+1	1/2	стабилен	–
	Нейтрон	$n \quad \bar{n}$	1838,7	0	0	+1	1/2	$0,93 \cdot 10^3$	$p \, e^- \, \bar{\nu}_e$
	Λ-	$\Lambda^0 \quad \bar{\Lambda}^0$	2183	0	0	+1	1/2	$2,5 \cdot 10^{-10}$	$p \, \pi^-, n \, \pi^0$
	гиперон	$\Sigma^+ \quad \bar{\Sigma}^-$	2334	+1	0	+1	1/2	$0,8 \cdot 10^{-10}$	$p \, \pi^0, n \, \pi^+$
		$\Sigma^0 \quad \bar{\Sigma}^0$	2328	0	0	+1	1/2	$<10^{-14}$	$\Lambda \, \gamma$
	Σ-	$\Sigma^- \quad \bar{\Sigma}^+$	2343	-1	0	+1	1/2	$1,5 \cdot 10^{-10}$	$n \, \pi^-$
	гипероны	$\Xi^0 \quad \bar{\Xi}^0$	2573	0	0	+1	1/2	$3 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda \, \pi^0$
	Ξ (кси-)	$\Xi^- \quad \bar{\Xi}^+$	2586	-1	0	+1	1/2	$1,7 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda \, \pi^-$
	-								
	гипероны	$\Omega^- \quad \bar{\Omega}^+$	3273	-1	0	+1	3/2	$1,3 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda \, K^-, \Xi \, \pi^0$

Между элементарными частицами может осуществляться сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное взаимодействие. Каждая частица описывается собственными характеристиками: квантовыми числами, временем жизни (τ), массой (m), спином (J) и электрическим зарядом (Q),

В зависимости от времени жизни элементарные частицы делятся на стабильные (электрон, протон, нейтрино), квазистабильные (свободный нейтрон) и нестабильные (некоторые К-мезоны и D-мезоны и др.).

Элементарные частицы, имеющие полуцелый спин, подчиняются статистике Ферми-Дирака и называются **фермионами**. Частицы, обладающие целым спином – **бозоны**, описываются статистикой Бозе-Эйнштейна. Электрические заряды исследованных элементарных частиц целые и кратны по величине элементарному электрическому заряду – e ($Q=0, \pm 1, \pm 2$).

Различают 4 класса элементарных частиц:

1. **Фотоны** (кванты электромагнитного поля). Это единственная частица, принадлежащая к этому классу. Фотоны участвуют в электромагнитном взаимодействии.

2. **Лептоны**: мюоны (μ^-, μ^+ : $m_\mu=200m_e$, спин $\frac{1}{2}$), электроны и позитроны (e^-, e^+);

нейтрино ($\nu_{e^+}, \nu_{e^-}, \nu_{\mu}, \bar{\nu}_{\mu}$). Нейтрино различают: электронные (e) и мюонные (μ). Волнистая черта стоит над антинейтрино. Лептоны участвуют в слабом взаимодействии, а заряженные лептоны и в электромагнитном; являются фермионами.

3. **Мезоны:** π -мезоны (π^- , π^+ , π^0), K -мезоны (K^- , K^+ , $\bar{K}^0$, K^0), η -мезоны (η). $m_{\pi} \approx 270 m_e$, $m_{\eta} \approx 1074 m_e$. Все мезоны – бозоны (спин равен нулю). Участвуют в сильном и слабом взаимодействии, а заряженные – и в электромагнитном.

4. **Барионы:** нуклоны (n, p) и гипероны – нестабильные частицы с массой больше массы нуклонов ($\Lambda^0, \bar{\Lambda}^0, \Sigma^+, \bar{\Sigma}^-, \Sigma^-, \bar{\Sigma}^+, \Sigma^0, \bar{\Sigma}^0$ и т.д.). Все барионы-фермионы. Участвуют в сильном взаимодействии.

Частицы, которые участвуют в сильных взаимодействиях (мезоны и барионы), часто объединяют в один класс **адронов**. Адроны составляют основную часть известных элементарных частиц.

В 1964 г. была высказана гипотеза о том, что все наблюдаемые адроны построены из частиц, называемых **кварками**. Кваркам приписываются дробные квантовые числа, дробный электрический заряд и спин $\frac{1}{2}$. Таким образом, многие частицы, называемые элементарными, на самом деле не являются таковыми. Кварковая гипотеза позволила объяснить многие свойства частиц и предсказать существование новых. Однако на опыте не удалось наблюдать кварки в свободном состоянии. Поэтому считается, что они могут существовать только внутри адронов. Это подтверждается рядом наблюдений. В пределах точности современного эксперимента кварки являются предельной ступенью дробления адронной материи, не имеют структуры и их размеры меньше 10^{-18} м.

Среди элементарных частиц существуют **античастицы**. Они имеют те же значения масс, спинов и других физических характеристик, что и их «двойники» - «частицы», однако обладают отличающимся по знаку электрическим зарядом. В 1932 г. была открыта первая такая частица – позитрон (античастица по отношению к электрону, обладающая зарядом $+1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл). Впоследствии были открыты и другие античастицы. У стабильных частиц как правило существуют и стабильные античастицы. Однако в веществе античастицы

встречаются с частицами, и при этом происходит **аннигиляция** пары частица-античастица. В процессе аннигиляции происходит превращение одной формы материи в другую. Например, при столкновении электрона с позитроном возникает 2 γ -кванта (два – из-за закона сохранения импульса).

В естественных условиях античастицы рождаются при взаимодействии космических лучей с атмосферой Земли.

Учебное издание

Е.П.Романова

Физика
Часть 2
Курс лекций

Учебное пособие

Оригинал-макет подготовлен автором и издан в авторской редакции

Подписано в печать 15.10.13. Формат 60х84 1/16,
Усл.печ.л. 8,0. Тираж 100 экз. Заказ 315/13.
Электронный адрес: <http://publish.sutd.ru>
Отпечатано в типографии ФГБОУВПО «СПГУТД»,
191028, Санкт-Петербург, ул. Моховая, 26

