Конспект лекций по математике
2 семестр
Мещерякова Г. П.

Учебный модуль шесть. Неопределенный интеграл.

Тема 17. Неопределенный интеграл и его вычисление.

Неопределенный интеграл. Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства первообразной. Свойства неопределенного интеграла вытекающие из определения. Линейные свойства. Таблица интегралов.

Лекция 9. Неопределенный интеграл. Определение. Свойства. Правила и методы интегрирования.

Функция $F(x)$, производная которой равна функции $f(x)$, т.е.

$$F'(x) = f(x) \tag{9..1}$$

называется первообразной для $f(x)$. Так, например, если $f(x) = \frac{1}{x}$, то ее первообразная есть $F(x) = \ln x$, так как

$$F'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad F'(x) = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = (n+1)\frac{x^n}{n+1} = x^n.$$

Если же $f(x) = \sin(2x)$, то ее первообразная $F(x) = -0.5\cos(2x)$, так как

$$F'(x) = \left(-0.5\cos(2x)\right)' = -0.5(-\sin(2x))\cdot 2- = \sin(2x).$$

Теорема. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ две разные первообразные одной и той же функции $f(x)$ на промежутке [a,b]. Тогда разность между ними есть постоянная величина C.

Доказательство. Обозначим за $\Phi(x)$ разность между $F_2(x)$ и $F_1(x)$, т.е. $\Phi(x) = F_2(x) - F_1(x)$ и возьмем производную от функции $\Phi(x)$

$$\Phi'(x) = (F_2(x) - F_1(x))' = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0 \tag{9.2}$$

Единственной функцией, производная которой при любом значении x равна нулю, есть постоянная величина, следовательно $\Phi(x) = \text{const} \equiv C$ и

$$F_2(x) = F_1(x) + C. \tag{9.3}$$

Следствие. Функция $f(x)$ имеет бесконечное множество первообразных $\{F(x)\}$, отличающихся на постоянную величину, т.е. $\{F(x)\} = F(x) + C$.

Пример. Для $f(x) = \sin(2x)$ первообразной будет не только функция $F(x) = -0.5\cos(2x)$, но и функция $F(x) = -0.5\cos(2x) + 4$, $F(x) = -0.5\cos(2x) - 1$, и. вообще, любая функция вида $F(x) = -0.5\cos(2x) + C$

Множество всех первообразных $\{F(x)\}$ функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от этой функции и обозначается так

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{9.4}$$

где $\int$ - знак интеграла, читается “интеграл”,

$f(x)$ - подынтегральная функция от переменной интегрирования x,

$f(x)$dx - подынтегральное выражение,

C - постоянная интегрирования.

Из определения интеграла следует, что

Производная от неопределенного интеграла равна подинтегральной функции. Действительно

$$(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x). \qquad (9.5)$$

Дифференциал от неопределенного интеграла равен подинтегральному выражению. Действительно, так как dF = $F'(x)$dx, получим

$$d(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx. \qquad (9.6)$$

Интеграл от дифференциала первообразной равен самой первообразной. Действительно, пусть $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ (т.е. $F'(x) = f(x)$). Тогда

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C \qquad (9.7)$$

Формулы (9.5 – 9.7) наглядно иллюстрируют то обстоятельство, что операции дифференцирования и интегрирования взаимно обратны с точностью до постоянной. В этой связи по аналогии с таблицей формул дифференцирования элементарных функций можно построить таблицу основных интегралов.

Линейные свойства неопределенного интеграла.

Интеграл о суммы функций равен сумме интегралов.

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \qquad (9.8)$$

Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла.

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \qquad (9.9)$$

Справедливость равенств 99.8) и (9.9) проверяется дифференцированием. Возьмем производную от левой и правой части равенства (9.8) и проверим, что они совпадают. По правилу (9.5)

$$\left(\int (f(x) + g(x))dx\right)' = \mathrm{f(x) + g(x)}$$

$$\left(\int f(x)dx + \int g(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' + \left(\int g(x)dx\right)' = \mathrm{f(x) + g(x)}$$

Если совпадаю производные, то и первообразные равны с точностью до постоянной. Равенство (9.9) доказывается аналогично.

Пример. Найти $\int \frac{1}{\sin^2(x)\cos^2(x)}dx$.

Решение. Запишем стоящую в числителе единицу в тригонометрическом виде, используя основное логарифмическое тождество (1 = $\sin^2 x$ + $\cos^2 x$), разделим почленно числитель на знаменатель, получим табличные интегралы:

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \mathrm{tgx} + \mathrm{C}_1 - \mathrm{ctgx} + \mathrm{C}_2 = \mathrm{tgx} - \mathrm{ctgx} + \mathrm{C}.$$

Таблица основных интегралов

$\int dx = x + C$	$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + C$
$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad a \neq -1$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$
$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln\lvert x-a \rvert + C$	$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$
$\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$	

Тема 18. Основные классы интегрируемых функций. Основные методы интегрирования: метод замены переменной, метод интегрирования по частям, метод разложения на простейшие. Стандартные замены.

Для вычисления неопределенных интегралов часто используют так называемые стандартные методы интегрирования. Перечислим основные из них.

Метод замены переменной. Добиться упрощения подынтегрального выражения можно при помощи замены переменной интегрирования. Суть этого метода заключается в замене переменной интегрирования x на некоторую непрерывную функцию $x = \varphi(t)$, имеющую непрерывную производную $\varphi'(t)$ и обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$, с тем, чтобы преобразовать исходный интеграл к более простому виду. Тогда $dx = \varphi'(t)dt$ и

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (9.10)$$

Формула (9.10) называется формулой замены переменной под знаком неопределенного интеграла. Для доказательства, как мы это делали ранее, возьмем производные по переменной x от левой и правой части и проверим, что они совпадают (формулы 9.5, 9.6)

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Для вычисления производной от правой части вспомним, что $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$. Тогда

$$\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)_x' = \frac{d\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)}{dx} = \frac{f(\varphi(t))\varphi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = f(\varphi(t)) = f(x)$$

Алгоритм метода замены переменной следующий. Вначале необходимо найти замену переменной интегрирования $x = \varphi(t)$, записать интеграл с новой переменной интегрирования t, вычислить его, а затем вновь вернуться к исходной переменной интегрирования, использовав обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$.

Простейшие замены. К простейшим относятся линейная замена и замена типа «подведение под знак дифференциала».

Линейная замена основана на следующем соотношении. Пусть интеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

является табличным. Тогда можно вычислить интеграл от функции $f(ax+b)$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C\,. \qquad (9.11)$$

Для доказательства возьмем производные от левой и правой части равенства (9.11)

$$\left(\int f(ax+b)dx\right)' = f(ax+b)$$

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b)+C\right)' = \left(\frac{1}{a}F(ax+b)\right)' + C' = \frac{1}{a}F'(ax+b) + 0 = \frac{1}{a}f(ax+b)\cdot a = f(ax+b)$$

Пример 1. Вычислить $\int \frac{1}{2x-1}dx$.

Решение. За базовый возьмем табличный интеграл $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

Тогда $\int \frac{1}{2x-1}dx = \begin{bmatrix} a=2 \\ b=1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$

Пример 2. Вычислить $\int \cos(5-3x)dx$.

Решение. За базовый возьмем табличный интеграл $\int \cos(x)dx = \sin(x) + C$

Тогда $\int \cos(5-3x)dx = \begin{bmatrix} a=-3 \\ b=5 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\sin(5-3x) + C$.

Замена типа подведение под знак дифференциала основана на формуле

$$\int F(f(x))f'(x)dx = \begin{bmatrix} f(x)=t \\ f'(x)dx = dt \end{bmatrix} = \int F(t)dt + C \qquad (9.12)$$

т.е. в данном случае сделав замену $f(x)=t$, $x = f^{-1}(t)$ мы проверяем, есть ли под знаком интеграла d*t*, а не находим d*x*.

Пример 3. Найти $\int \frac{e^{arctg(x)}}{1+x^2}dx$.

Решение. Особенностью данного интеграла является то обстоятельство, что его подынтегральное выражение содержит сомножитель $\frac{dx}{1+x^2}$, который является дифференциалом функции arctg x. Поэтому в данном интеграле целесообразно ввести замену переменной: t = arctg x. Отсюда dt = d(arctg(x)) = $\frac{1}{1+x^2}dx$ и $e^{\text{arctg x}} = e^t$.

Подставляя в исходный интеграл, имеем

$$\int \frac{e^{arctg(x)}}{1+x^2}dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\text{arctg x}} + C.$$

Пример 4. Найти $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 dx$.

Решение. Здесь уместна замена t = cos x, т.к. dt = - sin x dx, и $\sin^3$x dx = $\sin^2$x sinx dx = (1 – $\cos^2$(x)) sinx dx.

Поэтому

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x \cdot dx = \int (1-\cos^2 x)\cdot \cos^2 x \cdot (\sin x \cdot dx) = -\int (1-t^2)\cdot t^2 \cdot dt = \int (t^4 - t^2)\cdot dt =$$
$$= \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Метод интегрирования по частям. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ две дифференцируемые функции. Метод интегрирования по частям позволяет вычислять интегралы от произведений функций и основан на формуле

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

или, в развернутом виде,

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \qquad (9.13)$$

Эта формула носит название формулы интегрирования по частям. Ее применение полезно в тех случаях, когда подынтегральное выражение можно представить в виде произведения двух функций $f(x) = u(x)\cdot v'(x)$ и выражение $v(x)\cdot du = v(x)\cdot u'(x)dx$ для взятия интеграла проще, чем подынтегральное выражение $u(x)\cdot dv(x) = u(x)\cdot v'(x)dx$.

Доказательство. По правилу дифференцирования произведения функций $u(x)$ и $v(x)$, имеем

$$d(u(x)\cdot v(x)) = (u(x)\cdot v(x))'dx = u'(x)v(x)dx + u(x)v'(x)dx = du(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot dv(x)$$

Проинтегрируем это равенство, учитывая, что (9.7)

$$\int d(u(x)\cdot v(x)) = u(x)\cdot v(x)$$

Тогда

$$u(x)\cdot v(x) = \int du(x)\cdot v(x) + \int u(x)\cdot dv(x) = \int u'(x)\cdot v(x)dx + \int u(x)\cdot v'(x)dx.$$

Из этого соотношения легко получить формулу (9.13).

Пример 5. Найти $\int x\sin(x)dx$.

Решение. Использование формулы интегрирования по частям позволяет вместо исходного не табличного интеграла вычислить только интеграл от sin$x$. Покажем это, приведя схему записи удобную при использовании метода интегрирования по частям.

$$\int x\sin(x)dx = \begin{pmatrix} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = \int dv = \int \sin x dx = -\cos x \end{pmatrix} = -x\cdot\cos(x) + \int \cos(x)dx =$$

$= -x\cdot\cos(x) + \sin(x) + C$.

Обычно в интегралах за $u(x)$ берут следующие функции:
ln(x), arcsin(x), arccos(x), arctg(x), arcctg(x)
а за v'(x) берут функции e^x, sin(x), cos(x).

Функцию x^n , где n натуральное число, можно относить и к первой и ко второй группе.

Метод разложения на простейшие. Правильной рациональной дробью $R(x)$ называется отношение двух полиномов (многочленов)

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_1 x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+.....+b_1 x+b_0} \qquad (9.14)$$

где $a_i, i=1,...n;\ b_j,\ j=1,...m$ коэффициенты многочленов $a_n\neq 0, b_m\neq 0$ и $n<m$.

Если $n\geq m$ дробь называется неправильной, такие дроби необходимо упростить, выделив целую часть и остаток в виде правильной дроби.

Знаменатель рациональной дроби имеет ровно *n* корней, среди которых есть действительные корни (кратные, т.е. повторяющиеся, и некратные) и комплексные корни, также кратные и некратные (комплексные корни являются корнями квадратного трехчлена с отрицательным дискриминантом).

Простейшими дробями или просто простейшими называются дроби вида

$\frac{A}{x-a}$,

соответствует действительному некратному корню знаменателя *a*,

$\frac{A}{(x-a)^k}$, $k\geq 2$, k – целое положительное число,

соответствует действительному кратному корню знаменателя *a*, число *k* называется кратностью корня,

$\frac{Ax+b}{x^2+px+q}$, где знаменатель x^2+px+q имеет только комплексные корни, т.е. $D=p^2-4q<0$,

соответствует двум комплексным некратным корням,

$\frac{Ax+b}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, $k\geq 2$, k – целое положительное число,

соответствует двум комплексным кратным корням, число *k* кратность корня.

Всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы элементарных дробей, поэтому приведем интегралы от первых трех видов простейших

1. $\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|=C$.

(9.15)

2. $\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int(x-a)^{-k}dx=A\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k}+C$.

(9.16)

3. $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4p-q^2}}+C$. (9.17)

Пример 6. Вычислить $\int\frac{4}{x-3}dx$.

Решение. Используем формулу (9.15)

$\int\frac{4}{x-3}dx=4\ln|x-3|=C$.

Пример 7. Вычислить $\int \frac{5}{(x-2)^3} dx$.

Решение. Используем формулу (9.16)

$$\int \frac{5}{(x-2)^3} dx = 5\int (x-2)^{-3} dx = 5\frac{(x-2)^{-2}}{-2} + C.$$

Пример 8. Вычислить $\int \frac{2x+3}{x^2+x+2} dx$.

Решение. Так как $D = p^2 - 4q = 1^2 - 4 \cdot 2 < 0$, то используем формулу (9.17)

$$\int \frac{2x+3}{x^2+x+2} dx = \frac{2}{2}\ln(x^2+x+2) + \frac{2\cdot 3 - 2\cdot 1}{\sqrt{4\cdot 2 - 1^2}} arctg \frac{2x+1}{\sqrt{4\cdot 2 - 1^2}} + C = \ln(x^2+x+2) + \frac{4}{\sqrt{7}} arctg \frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C$$

Приведем примеры разложения правильной рациональной дроби на простейшие слагаемые, исходя из следующего правила:

каждому некратному корню соответствует простейшая первого вида,

каждому кратному корню кратности k соответствует k-1 простейшая второго вида с убывающими степенями знаменателя и одна простейшая первого вида,

каждым двум некратным комплексным корням соответствует простейшая третьего вида.

Пример 9. Разложить на простейшие рациональную дробь $\frac{3x-1}{(x+1)x^2}$.

Решение. Корни знаменателя: x_1 = -1 действительный некратный корень, и x_2 = 0 действительный кратный корень кратности 2. Следовательно

$$\frac{3x-1}{(x+1)x^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x^2} + \frac{B_2}{x}.$$

Для того, чтобы найти неизвестные коэффициенты A, B_1 и B_2 приведем правую часть выражения к общему знаменателю, раскроем скобки и приведем подобные члены в числителе

$$\frac{3x-1}{(x+1)x^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B_1}{x^2} + \frac{B_2}{x} = \frac{Ax^2 + B_1(x+1) + B_2x(x+1)}{(x+1)x^2} = \frac{(A+B_2)x^2 + (B_1+B_2)x + B_1}{(x+1)x^2}$$

Приравняем числители исходного и конечного выражений

$$3x-1 = (A+B_2)x^2 + (B_1+B_2)x + B_1.$$

Такое соотношение возможно тогда и только тогда когда совпадают коэффициенты при одинаковых степенях x (если какая-то степень x отсутствует, то это значит, что коэффициент при ней равен нулю). Получим систему

$$\begin{cases} 0 = A + B_2 \\ 3 = B_1 + B_2 \Rightarrow B_1 = -1,\ B_2 = 4,\ A = -4 \\ -1 = B_1 \end{cases}$$

Окончательно

$$\frac{3x-1}{(x+1)x^2} = \frac{-4}{x+1} + \frac{-1}{x^2} + \frac{4}{x}$$

Пример 10. Разложить на простейшие рациональную дробь $\frac{2x-1}{(x^2+1)x}$.

Решение. Корни знаменателя: x_1=0 действительный некратный корень, и два комплексных корня квадратного трехчлена x^2+1 с отрицательным дискриминантом

$$\frac{2x-1}{(x^2+1)x}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{D}{x}.$$

Для того, чтобы найти неизвестные коэффициенты A, B и D приведем правую часть выражения к общему знаменателю, раскроем скобки и приведем подобные члены

$$\frac{2x-1}{(x^2+1)x}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{D}{x}=\frac{(Ax+B)x+D(x^2+1)}{(x^2+1)x}=\frac{(A+D)x^2+Bx+D}{(x^2+1)x}$$

Приравняем числители и коэффициенты при одинаковых степенях x

$$2x-1=(A+D)x^2+Bx+D.$$

Получим систему

$$\begin{cases} 0=A+D \\ 2=B \\ -1=D \end{cases} \Rightarrow D=-1,\ B=2,\ A=1$$

Окончательно

$$\frac{2x-1}{(x^2+1)x}=\frac{x+2}{x^2+1}+\frac{-1}{x}.$$

Учебный модуль семь. Определенный интеграл

Тема 19. Определенный интеграл. Несобственные интегралы. Определение определенного интеграла, его свойства. Линейные свойства определенного интеграла. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Несобственные интегралы.

Лекция.10. Определенный интеграл. Определение. Свойства.

Площадь криволинейной трапеции.

Пусть на отрезке [a,b] задана неотрицательная непрерывная функция f(x). На плоскости XOY, как показано на рис.10.1, график этой функции, отрезок оси абсцисс и прямые $x = a$ и $y = b$ образуют криволинейную трапецию, площадь такой криволинейной трапеции равна S. Разделим отрезок $[a,b]$ на произвольные n частей, при этом координаты точек деления удовлетворяют соотношению

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b.$$

В точках деления проведем прямые, перпендикулярные оси OX. Криволинейная трапеция разделилась на n узких криволинейных трапеций (элементарных трапеций) шириной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ($i = 1, 2\ldots n$). Площадь каждой такой элементарной трапеции обозначим как ΔS_i.

На каждом промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку x_i^*, $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, вычислим в точке x_i^* функцию $f(x_i^*)$. Каждую i-ю полоску заменим на соответствующий прямоугольник, высота которого равна $f(x_i^*)$. Тогда площадь $\Delta S_i \approx f\left(x_i^*\right)\Delta x_i$,

Сумма площадей полученных прямоугольников приближенно равна площади исходной криволинейной трапеции.

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x_i. \qquad (10.1)$$

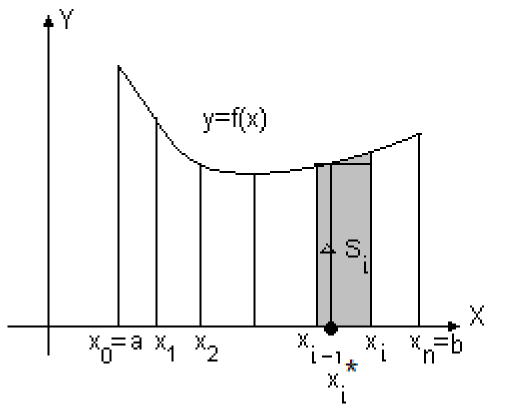

Рис. 10.1. Криволинейная трапеция.

Увеличим число разбиений n. При этом каждый раз обязательно должна уменьшатся длина наибольшего из разбиений Δx_i. Эту длину называют рангом дробления и обозначают r , т.е. $r = \max \Delta x_i \to 0$ при $n \to \infty$. При этом погрешность при вычислении площади будет стремиться к нулю и в пределе мы получим площадь криволинейной трапеции, т.е.

$$\lim_{n\to\infty, r\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\Delta x_i = \mathrm{S} \qquad (10.2)$$

Сумму, стоящую в выражении (10.2) называют интегральной суммой.

Определение определенного интеграла. Свойства определенного интеграла.

Пусть на интервале [a,b] задана непрерывная функция $f(x)$. Разделим отрезок $[a,b]$ на произвольные n частей, при этом координаты точек деления удовлетворяют соотношению

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b.$$

На каждом промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ (i = 1, 2…n) выберем произвольную точку x_i^*, $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, вычислим в точке x_i^* функцию $f(x_i^*)$ и умножим на длину интервала $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, получим $\mathrm{f}\left(\mathrm{x}_i^*\right)\Delta \mathrm{x}_\mathrm{i}$. Просуммируем по всем i , получим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{f}\left(\mathrm{x}_i^*\right)\Delta \mathrm{x}_\mathrm{i}$$

Увеличим число разбиений n. При этом каждый раз обязательно должна уменьшатся длина наибольшего из разбиений Δx_i, т.е. ранг дробления должен стремится к нулю. Если независимо от способа разбиения отрезка [a,b] на части, для функции f(x) существует конечный предел интегральной суммы при $n \to \infty$ и $r \to 0$, то этот предел называется определенным интегралом от функции $f(x)$ на интервале [a,b], а сама функция $f(x)$ - интегрируемой на [a,b].

Для обозначения предельного значения суммы Лейбниц ввел символ "$\int$", как стилизацию начертания буквы S - начальной буквы латинского слова Summa.

$$\lim_{n\to\infty, r\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\cdot\Delta x_i \equiv \int_a^b f\left(x\right)dx. \qquad (10.3)$$

Читается: "Интеграл от a до b от функции $f(x)$". Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интеграла. Интеграл существует для всех непрерывных и кусочно непрерывных функци (т.е. имеющих на интервале [a, b] только конечное число разрывов первого рода).

Определенный интеграл - есть число! Его значение зависит только от вида функции $f(x)$ и пределов интегрирования, но не от переменной интегрирования, которую можно обозначить любой буквой.

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \int_a^b f(t)dt$$

Определенный интеграл имеет следующий свойства, вытекающие из определения.

1. $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$ (10.4)

2. $\int_a^b 0\,dx = 0.$ (10.5)

3. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ (10.6)

4. $\int_a^b dx = b - a$ (10.7)

Свойство аддитивности. Если функция $f(x)$ интегрируема на интервалах $[a,c]$ и $[c,b]$, a < c < b, то она интегрируема и на интервале $[a,b]$, при этом выполняется равенство

$$\int_a^c \mathrm{f(x)\,dx} + \int_c^b \mathrm{f(x)\,dx} = \int_a^b \mathrm{f}(\mathrm{x})\,dx \qquad (10.8)$$

Свойство аддитивности имеет наглядный геометрический смысл: оно выражает свойство аддитивности площади, например, плоских фигур (см. рис.10.2).

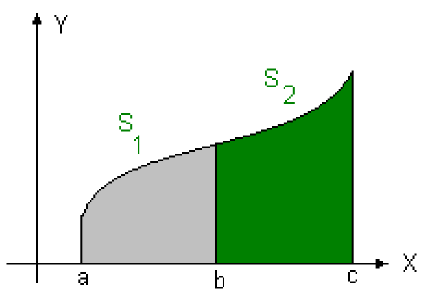

Рис. 10.2. Аддитивность определенного интеграла.

Следствие.

Если $f(x)$ - нечетная функция, т.е. $f(-x) = -f(x)$, то $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ (10.9)

Если $f(x)$ - четная функция, т.е. $f(-x) = f(x)$, то $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$ (10.10)

Линейные свойства определенного интеграла.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла,

$$\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx. \tag{10.11}$$

Действительно, по определению

$$\int_a^b cf(x)\,dx = \lim_{n\to\infty, r\to 0}\sum_{i=1}^{n} cf\left(x^*_i\right)\cdot \Delta x_i = c\lim_{n\to\infty, r\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(x^*_i\right)\cdot \Delta x_i = c\int_a^b f(x)\,dx$$

2. Определенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых. Для суммы двух функций имеем

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \tag{10.12}$$

Доказательство также основано на определении определенного интеграла

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \lim_{\substack{n\to\infty\\ r\to 0}}\sum_{i=1}^{n}(f\left(x_i^*\right)+g(x_i^*))\cdot\Delta x_i = \lim_{\substack{n\to\infty\\ r\to 0}}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i^*\right)\cdot\Delta x_i + \lim_{\substack{n\to\infty\\ r\to 0}}\sum_{i=1}^{n} g(x_i^*)\cdot\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Интегрирование неравенств.

Пусть на интервале $[a,b]$ функции f(x) и g(x) связаны соотношением $f(x)\ge g(x)$ (рис. 10.3).Тогда и для интегралов выполняется то же соотношение

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$$

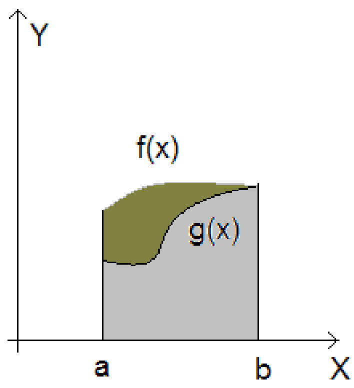

Рис. 10.3. Интегрирование неравенств. Зеленым обозначена разность площадей криволинейных трапеций.

Действительно

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i \ge \sum_{i=1}^{n} g(x_i^*)\Delta x_i = \int_a^b g(x)dx$$

Функция непрерывная на замкнутом интервале, по теореме Вейерштрасса, достигает на нем своих наибольшего M и наименьшего m значений $m\le f(x)\le M$. Тогда, определенный интеграл лежит между двумя числами

$$m(b-a) = \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M\,dx = M(b-a)$$

3. Теорема о среднем. Если f(x) непрерывна на интервале $[a,b]$, то на этом отрезке найдется такая точка с, что справедливо равенство (рис.10.4)

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a) \tag{10.13}$$

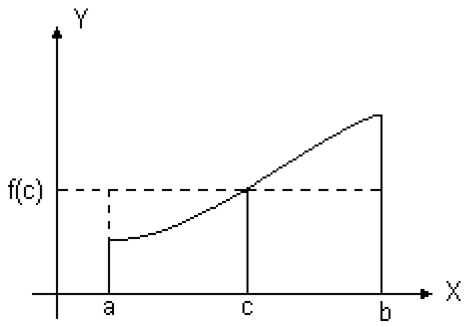

Рис. 10.4. Геометрическая интерпретация теоремы о среднем

Эта формула имеет ясный геометрический смысл (рис.10.4): площадь криволинейной трапеции численно равна площади прямоугольника с тем же основанием, что и трапеция, причем высота прямоугольника равна значению функции f(с) в некоторой точке с, лежащей между a и b. Значение f(с) называется средним значением функции на интервале $[a,b]$ и имеет обозначение $\overline{f(x)}$

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \equiv \overline{f(x)}$$

Вычисление определенного интеграла

Теорема. Интеграл с переменным верхним пределом равен первообразной функции f(x). Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a,b]$, то функция

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

где $x \in [a,b]$, дифференцируема в любой внутренней точке x этого интервала, причем $\Phi'(x) = f(x)$, то есть функция $\Phi(x)$ является первообразной функции $f(x)$. Функция $\Phi(x)$ называется интегралом с переменным верхним пределом.

Доказательство. Найдем производную функции $\Phi(x)$. Для этого вначале выберем приращение аргумента Δx столь малым, чтобы точка $x + \Delta x$ лежала внутри отрезка $[a,b]$, и найдем приращение функции $\Phi(x)$ (рис. 10.5), приращение обозначено зеленым цветом).

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

Здесь мы использовали свойство аддитивности. К полученному интегралу применим теорему о среднем (10.13)

$$\Delta\Phi(x) = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(\mathrm{c})\Delta x, \text{ где } \mathrm{c} \in [x, x+\Delta x].$$

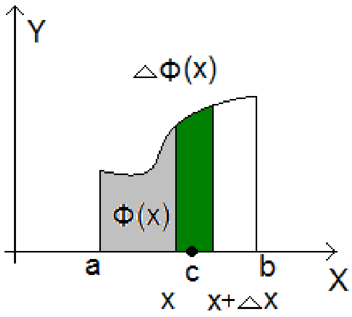

Рис. 10.5. Интеграл с переменным верхним пределом.

Следовательно, $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta \mathrm{x}} = f(c)$. Поскольку $f(x)$ непрерывна и, если $\Delta x \to 0$, то $\mathrm{c} \to x$, а $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(c) = f(x)$. Поэтому производная функции $\Phi(x)$ равна f(x)

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{c\to x} f(c) = f(x). \qquad (10.13)$$

А так как производная функции $\Phi(x)$ равна $f(x)$, то, по определению первообразной, $\Phi(x)$ первообразная. Следовательно, интеграл от функции $f(x)$ с постоянным нижним и переменным верхним пределом x, есть одна из первообразных функции $f(x)$ $\Phi(x) = F(x) + C$.

Теорема. Формула Ньютона – Лейбница. Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a,b]$, то определенный интеграл равен разности значений первообразной $F(x)$ на концах промежутка

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a), \qquad (10.14)$$

Доказательство. В силу непрерывности на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ интегрируема и, на основании предыдущей теоремы, имеет первообразную

$$\Phi(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt = F(x) + C. \qquad (10.15)$$

Константу C легко выразить через значение первообразной $F(x)$ в точке а. Действительно, принимая во внимание, что

$$\Phi(\mathrm{a}) = \int\limits_{a}^{a} f(t)\,dt = F(a) + C = 0 \qquad (10.16)$$

из (10.16) получим:

$$-F(a) = C. \qquad (10.17)$$

Поскольку

$$\Phi(b) = \int_a^b f\left(t\right)dt = F(b) + C\,, \tag{10.18}$$

то, подставив (10.17) в (10.18) получим формулу Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b)\;-\;F(a) = \;F(x)\Big|_a^b \tag{10.19}$$

где $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$, а $\Big|_a^b$- знак подстановки Ньютона. Этот знак означает, что сперва в функцию $F(x)$ подставляем верхний предел и вычитаем функцию вычисленную в точке нижнего предела.

Формула (10/19) дает следующее правило: *для вычисления определенного интеграла необходимо найти первообразную подынтегральной функции, т.е. вычислить неопределенный интеграл, а затем вычислить разность значений первообразной на верхнем и нижнем пределе*.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int\limits_2^5 x^3 dx$.

Решение. $\int x^3 dx = \dfrac{x^4}{4} + C$. Следовательно, по формуле (3.7)

$$\int_2^5 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_2^5 = \frac{\left(5\right)^4}{4} - \frac{\left(2\right)^4}{4} = \frac{625}{4} - \frac{16}{4} = \frac{609}{4}.$$

При вычислении определенного интеграла используются те же основные приемы, что и при вычислении неопределенного интеграла.

Формула интегрирования по частям в определенном интеграле

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx \;=\; u\left(x\right)\cdot v\left(x\right)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx \tag{10.20}$$

Пример 2. Вычислить $\int\limits_0^1 xe^{-x}\;dx.$

Решение. Прямому вычислению данного интеграла препятствует наличие сомножителя x в подынтегральном выражении. Поскольку производная от x'=1, то, используя (10.20), возьмем u = x. Тогда

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = \begin{vmatrix} u = x & dv = e^{-x}dx \\ du = dx & v = -e^{-x} \end{vmatrix} = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -2e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e}.$$

Замена переменной в определенном интеграле. При вычислении определенного интеграла можно использовать замены, в том числе простейшие замены: линейную и «типа подведение под знак дифференциала».

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_\alpha^\beta f\left(\phi\left(t\right)\right)\phi'\left(t\right)dt = F(t)\Big|_\alpha^\beta = F(\beta) - F(\alpha) \tag{10.21}$$

где $x = \varphi(t)$, $\varphi(\alpha) = a$, $\alpha=\varphi^{-1}(a)$; $\varphi(\beta) = b$, $\beta = \varphi^{-1}(b)$.

Пример 3. Вычислить $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx.$.

Решение. Положив $ln(x)$ = t, имеем $\frac{dx}{x} = dt$. Если x = 1, то t = ln 1 = 0, если x = e, то t = ln e = 1. Тогда

$$\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int\limits_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{3}\left(1^3 - 0^3\right) = \frac{1}{3}.$$

Несобственные интегралы

Для существования определенного интеграла необходимо, чтобы промежуток интегрирования был конечен и подынтегральная функция ограничена. Когда не выполняется одно или оба эти условия, приходят к понятию несобственного интеграла.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна для всех x удовлетворяющих условию $a \leq x < +\infty$.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b f(x)\, dx$, который имеет смысл при всех $b > a$. При изменении величины b этот интеграл будет вести себя как непрерывная функция от b. Если при бесконечном возрастании величины b существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то он называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ с бесконечным верхним пределом. Таким образом, по определению

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$$

Если предел бесконечен или не существует, то говорят, что несобственный интеграл не существует или расходится.

Аналогичным образом определяются несобственные интегралы с бесконечным нижним пределом

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$$

и несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{-b}^b f(x)dx$$

Из определений несобственных интегралов непосредственно следует схема их вычисления: вначале находится первообразная $F(x)$ для подынтегральной функции f(x), затем рассматривается разность пределов первообразных в точках верхнего и нижнего пределов интегрирования, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\big(F(b)-F(-b)\big)$$

Пример. Установить, при каких значениях p сходится и при каких расходится интеграл $I = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$

Решение:

если $p \neq 1$, $\quad I = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}\left(b^{1-p}-1\right)$,

если $p = 1$, $\quad I = \lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty}(\ln x\big|_1^b) = \infty$,

Вывод: сходимость интеграла I зависит от значения параметра p:

если $p > 1$, то $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}$, т.е. интеграл сходится,

если $p < 1$, то $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \infty$, т.е. интеграл расходится,

если $p = 1$, то $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \ln x\big|_1^{+\infty} = \infty$ интеграл расходится.

Несобственные интегралы от разрывных функций. Пусть функция f(x) определена и непрерывна на [a,b] за исключением точки c $\in$ [a,b] . Рассмотрим три случая.

1. Функция терпит разрыв в точке b. Интеграл от функции $f(x)$ с точкой разрыва на верхнем пределе определяется так

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Решение.

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} = \frac{\pi}{2}-0 = \frac{\pi}{2}.$$

2. Функция терпит разрыв в точке a. Тогда по аналогии с предыдущим случаем интеграл с точкой разрыва на нижнем пределе определяется так

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

Пример. Исследовать интеграл $I = \int_0^1\frac{dx}{x}$. Здесь подынтегральная функция $\frac{1}{x}$ не существует в точке $x = 0$, поэтому

$$\int_0^1\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}|\ln x\big|_{0+\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln 1-\ln\varepsilon\right) = +\infty$$

Таким образом, данный интеграл расходится (не существует).

3. Функция имеет разрыв во внутренней точке отрезка [a,b], т.е. a < c < b.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^{1/3}}$.

Решение. Подынтегральная функция терпит разрыв в точке 0. Поэтому

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^{1/3}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{x^{2/3}}{2/3}\right|_{-1}^{0-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{x^{2/3}}{2/3}\right|_{0+\varepsilon}^{1} = -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=0$$

Тема 20. Приложения определенного интеграла. Приложения определенного интеграла к задачам геометрии: вычисление площадей фигур, объемов тел переменного сечения. Объем тела вращения.

1. *Вычисление площади плоских фигур*. Как уже отмечалось, если $f(x) \geq 0$ на отрезке [a,b], то определенный интеграл от функции численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$, и $x = b$.

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (10.22)$$

Если на $[a,b]$ функция, как показано на рис.10.6, меняет знак, то необходимо вычислить интеграл от модуля подинтегральной функции.

$$S = \int_a^b |f(x)|dx$$

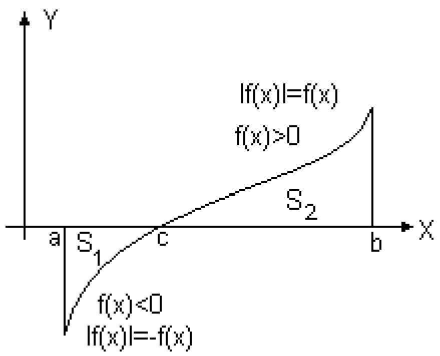

Рис. 10.6.

Вычисление площади при помощи определенного интеграла

Это означает, что если на отрезке $[a,c] \subset [a,b]$ функция $f(x) < 0$, то на этом отрезке берется отрицательное значение функции

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^c (-f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Пример 1. Вычислить площадь, ограниченную осью абсцисс и синусоидой на отрезке $[0,2\pi]$.

Решение. Поскольку $\sin(x) \geq 0$ на отрезке $[0, \pi]$ и $\sin(x) \leq 0$ на $[\pi,2\pi]$, то искомая площадь S равна

$$S = \int_0^{2\pi} |\sin x|\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) + (\cos 2\pi - \cos\pi) = -(-1-1) + (1+1) = 4.$$

В более общем, случае требуется вычислить площадь плоской фигуры ограниченной несколькими кривыми линиями. В этом случае искомая площадь есть алгебраическая сумма площадей нескольких криволинейных трапеций. Например, как показано на рис.10.7

$$S_{A_1ABB_1} = S_{aABb} - S_{aA_1c} + S_{cB_1b} = \int_a^b |g(x)|\,dx - \int_a^c |f(x)|\,dx + \int_c^b f(x)dx$$

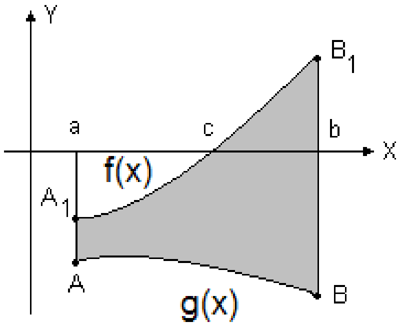

Рис. 10.7. Вычисление площади плоской фигуры.

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной функциями $y_1 = |x - 2|$ и $y_2 = \sqrt{x}$ (рис. 10.8).

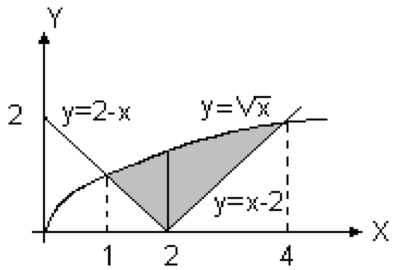

Рис. 10.8. Площадь плоской фигуры.

Решение. Найдем точки пересечения линий. Для этого решим уравнение $y_1(x) = y_2(x)$.

Возведем в квадрат левую и правую часть

$$\sqrt{x} = |x-2| \Rightarrow x = (x-2)^2 \text{ или } x^2 - 5x + 4 = 0; \; x_1 = 1, x_2 = 4.$$

Учтем, что $|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \ge 2 \\ -(x-2), & x < 2 \end{cases}$.

Следовательно

$$S = \int_1^4 \sqrt{x}dx - \int_1^4 |x-2|\,dx = \int_1^4 \sqrt{x}dx - \int_1^2 (2-x)dx - \int_2^4 (x-2)dx = \left.\frac{x^{3/2}}{3/2}\right|_1^4 - \left.\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\right|_1^2 - \left.\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\right|_2^4 =$$

$$= \left(\frac{2\cdot 8}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(\left(4 - \frac{4}{2}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right)\right) - \left(\left(\frac{16}{2} - 8\right) - \left(\frac{2^2}{2} - 4\right)\right) = 5 - \frac{1}{2} - 2 = 2.5$$

Вычисление длины дуги. Пусть некоторая гладкая плоская кривая описывается функцией $f(x)$ и отрезку $[a,b]$ оси абсцисс отвечает дуга АВ. Произвольным образом разобьем эту дугу, как показано на рис.10.9 на n частей точками M_0, M_1, ..., M_n. Получим элементарные дуги. Соединив каждые две соседние точки прямой, получим вписанную в дугу АВ ломаную линию. Длину звена ломанной Δl_i, лежащую между точками $M_i\, M_{i+1}$, где $M_i(x_i, f(x_i))$, $M_{i+1}(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ находим по теореме Пифагора

$$\Delta l_i = \sqrt{(f(x_{i+1}) - f(x_i))^2 + (x_{i+1} - x_i)^2} = \sqrt{(\Delta f(x_i)^2 + (\Delta x_i)^2}$$

Длина элементарной дуги $M_i\, M_{i+1}$ примерно равна Δl_i

$$M_i M_{i+1} \approx \Delta l_i = \sqrt{(\Delta f(x_i))^2 + (\Delta x_i)^2}\,. \qquad (10.23)$$

Просуммируем (5.3) по всем элементарным дугам, тогда длина L дуги AB равна

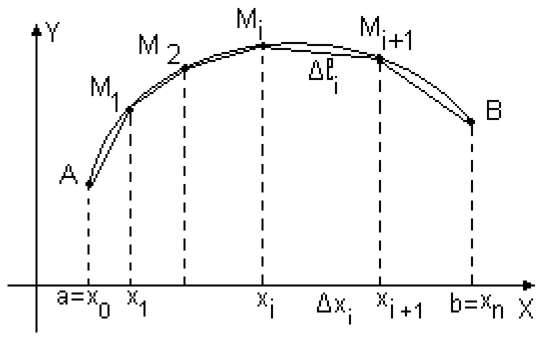

Рис. 10.9. Длина дуги.

$$L = \sum_{i=1}^{n} M_i M_{i+1} \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta f(x_i))^2 + (\Delta x_i)^2}$$

Выражение, стоящее в правой части равенства является интегральной суммой. При бесконечном увеличении числа точек разбиения $n \to \infty$, проводимого произвольным образом, если каждый раз длина самой большой элементарной дуги r будет стремится к нулю $r \to 0$,то длина ломаной будет неограниченно приближаться к длине дуги. Тогда длина дуги *L* плоской кривой

$$L = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ r\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ r\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\Delta f(x_i))^2 + (\Delta x_i)^2} = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ r\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i = \int_a^b dx\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2} \qquad (10.22)$$

Если кривая задана в параметрическом виде: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, то длина кривой вычисляется по формуле

$$L = \int_\alpha^\beta dt\sqrt{(x'(t))^2 + \left(y'(x)\right)^2} \qquad (10.23)$$

Пример 1. Найти длину дуги кривой $y^2 = x^3$, заданной на отрезке от $x = 0$ до $x = 1$ $(y \ge 0)$.

Решение. $y = +x^{3/2} \Rightarrow y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$. Подставляя затем этот результат в (5.4), получим

$$L = \int_0^1 dx\sqrt{1+\frac{9}{4}x} = \int_0^1 dx\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{1/2} = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{8}{27}\left(\frac{13}{4}-1\right) = \frac{2}{3}$$

Пример 2. Найти длину дуги кривой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, если t изменяется 0 до $\pi/2$.

Решение. Вначале находим производные по t

$x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t$, $y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t$

Подставляя в формулу (5.5), имеем

$$L = \int_0^{\pi/2}\sqrt{9a^2(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)}dt = \int_0^{\pi/2} 3a\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t}dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} 3a\sin t\cos t dt = \frac{3}{4}a\int_0^{\pi/2}\sin 2t d(2t) = \frac{3}{4}a(-\cos 2t)\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{3}{4}a(\cos\pi - \cos 0) = \frac{3}{2}a$$

Вычисление объемов тел. Пусть дано тело переменного сечения, расположенной над осью OX (рис.10.10), ограниченное плоскостями $x = a$ и $x = b$. Объем тела обозначим за V. Разделим отрезок $[a,b]$ на произвольные n частей, при этом координаты точек деления удовлетворяют соотношению

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b.$$

В точках деления проведем плоскости, перпендикулярные оси OX. Тело разделится на n узких слоев (элементарных объемов) шириной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2…n)$. Объем каждого такого слоя обозначим как ΔV_i. На каждом промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку x_i^*, $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Обозначим за $S(x^*_i)$ площадь поперечного сечения тела в этой точке. Тогда

$$\Delta V_i \approx S(x_i^*)\cdot\Delta x_i \qquad (10.24)$$

Просуммируем (10.24) по всем i, получим интегральную сумму

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} \mathrm{S}\left(\mathrm{x}_i^*\right) \Delta \mathrm{x}_\mathrm{i} \qquad (10.25)$$

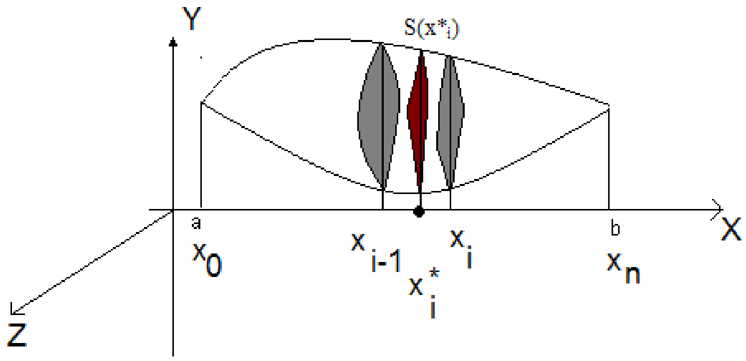

Рис. 10.10. Объем тела переменного сечения.

Увеличим число разбиений n. При этом каждый раз обязательно должна уменьшатся длина наибольшего из разбиений Δx_i, т.е. ранг дробления r должен стремится к нулю. Тогда объем тела переменного сечения V,будет равен пределу интегральной суммы при $n \to \infty$ и $r \to 0$

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V = \lim_{\substack{n\to\infty,\\ r\to 0}} \sum_{i=1}^{n} S(x_i^*) \cdot \Delta x_i = \int_a^b S(x)dx \qquad (10.26)$$

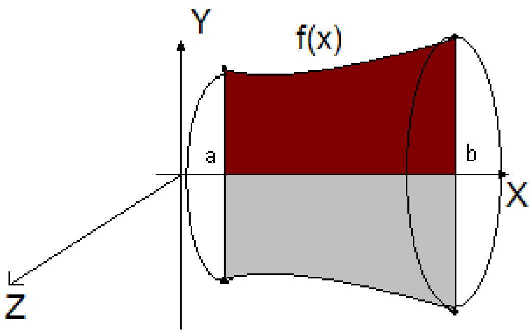

Рис. 10.11. Объем тела вращения.

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx \qquad (10.27)$$

Если тело получено при вращении криволинейной трапеции вокруг оси OX (рис. 5.6), то $S(x) = \pi f^2(x)$. В этом случае объем тела V вычисляется по формуле

Пример. Вычислить объем тела, полученного при вращении кривой y = sin(x) вокруг оси OX $x \in [0, \pi]$.

Решение.

$$V = \pi\int_0^\pi \sin^2(x)dx = \pi\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{\pi}{2}\left(\int_0^\pi dx - \int_0^\pi \cos 2x dx\right) = \frac{\pi}{2}\left(\pi - \frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^\pi\right) = \frac{\pi^2}{2}$$

Лекция 11. Числовые и степенные ряды.

Тема 20. Определение числового ряда. Правила действия с числовыми рядами. Сходимость числовых рядов. **Знакочередующиеся ряды. Степенные ряды**.

Пусть дана функция $y = f(x)$. Если областью определения функции является множество натуральных чисел $x \in N$, то мы говорим, что значения функции образуют бесконечную числовую последовательность

$$f(1), f(2), \dots f(n) \dots .$$

$f(n)$ называется общим членом последовательности. Для сокращения записи вводится обозначение $f(n) = u_n$. Тогда последовательность можно записать так

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n \dots \qquad (11.1)$$

Замечание. Областью определения функция $y = f(x)$ может быть и множество натуральных чисел с добавлением нуля $N_0 = \{0, 1, \dots n, \dots\}$.

Пусть задана бесконечная числовая последовательность чисел (11.1). Числовым рядом называется последовательность чисел, члены которой соединены знаком плюс, т.е. выражение

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n . \qquad (11.2)$$

числа $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ называются членами ряда, а u_n общим членом ряда.

Например, числовой ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots\dots\dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots\dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

имеет общий член $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

Сходимость и сумма ряда. Частичной суммой S_n называется сумма первых n членов ряда, т.е.

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 \dots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

Частичные суммы ряда образуют новую последовательность - последовательность частичных сумм $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$. Если существует конечный предел последовательности частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} Sn = S < \infty$, то ряд (11.2) называется сходящимся, а число S - суммой ряда. В этом случае пишут $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$. Если такой предел не существует или равен бесконечности, то ряд называют расходящимся.

Разность между рядом и его частичной суммой называется остатком ряда и обозначается R_n.

$$R_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - S_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} u_m \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S_n + R_n$$

Если предел последовательности частичных сумм бесконечен или не существует, то ряд (11.2) называется расходящимся.

Пример 1. Определить сходимость ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+....+\frac{1}{n(n+1)}+....$$

Решение. Напишем частичную сумму заданного ряда

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+..........+\frac{1}{n\left(n+1\right)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\left(k+1\right)}$$

Каждое из слагаемых представим в виде суммы простейших так, как это делали в интегралах

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}=\frac{A(k+1)+Bk}{k(k+1)}$$

Числители выражений слева и справа равны, подставляя в равенство корни знаменателя, найдем A и B

$$1=A(k+1)+Bk$$

$$k=0\Rightarrow 1=A$$

$$k=-1\Rightarrow 1=-B\Rightarrow B=-1$$

то есть

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

Применим формулу к каждому члену частичной суммы ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+..........+\frac{1}{n\left(n+1\right)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1},$$

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}$$

Рассмотрим предел частичных сумм

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{\infty}=1+0=0.$$

Следовательно, ряд сходится и его сумма равна 1.

Пример 2. Дан числовой ряд

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+......+\frac{1}{\sqrt{n}}+.......=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}},$$

исследовать сходимость ряда.

Решение. Заменим в частичной сумме каждое слагаемое на последнее $\frac{1}{\sqrt{n}}$, тем самым уменьшим частичную сумму

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+........+\frac{1}{\sqrt{n}}>n\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$$

Величина $\sqrt{n}$ бесконечно возрастает с ростом n. Поэтому предел последовательности S_n при $n\to\infty$ равен бесконечности и ряд расходится.

Пример 3. Определить сходимость следующего ряда:

1 - 1 + 1 - 1 + $(-1)^{n+1}$ + ...

Решение. Четная частичная сумма этого ряда $S_{2n} = 0$, а нечетная - $S_{2n+1} = 1$. Это означает, что предел $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует. Следовательно, данный ряд расходится.

Теорема о необходимом условии (признаке) сходимости числового ряда. Если числовой ряд сходится, то его общий член при $n \to \infty$ стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \qquad (11.3)$$

Доказательство. Рассмотрим две соседние частичные суммы ряда (11.2)

$S_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots u_{n-1}$,
$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots u_{n-1} + u_n = S_{n-1} + u_n$.

Из сходимости ряда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$$

С другой стороны, по теоремам о пределах,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_{n-1} + u_n\right) = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} + \lim_{n\to\infty} u_n,$$

т. е.
$S = S + \lim_{n\to\infty} u_n$,
откуда и следует (11.3) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Введенное условие сходимости является лишь необходимым, но не достаточным. Это означает, что существуют расходящиеся ряды, у которых

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Пример. Ряд, рассмотренный в примере 2

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{\text{n}}} + \dots$$

Расходится, но его общий член стремится к нулю. Действительно

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Аналогичным свойством обладает гармонический ряд, который будет рассмотрен ниже.

Основные свойства сходящихся числовых рядов

Свойство 1. Ряд и его остаток сходятся и расходятся одновременно. Действительно, частичная сумма ряда при фиксированном n есть число. Рассмотрим сумму m слагаемых $m \ge n$.

$$S_m = u_1 + u_2 + u_3 \dots + u_n + u_{n+1} + \dots + u_m = \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{k=n+1}^{m} u_k .$$

Рассмотрим предел этого выражения при $m \to \infty$. Так как предел постоянной равен самой постоянной, а $\sum_{i=1}^{n} u_i$ от m не зависит и является величиной постоянной, то

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \sum_{i=1}^{n} u_i + \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} u_k .$$

Оба предела одновременно конечны или бесконечны.

Следствие. Добавление или отбрасывание конечного числа членов не изменяет сходимости ряда.

Свойство 2. При умножении ряда на число c его сходимость не меняется. Докажем свойство для сходящихся рядов. Если ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

сходится и имеет сумму S, то ряд

$$cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n + ..,$$

также сходится и имеет сумму $c \cdot S$.

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму ряда

$$\sigma_n = cu_1 + cu_2 + cu_3 + \ldots + cu_n = cS_n.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} c \cdot S_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} S_n = c \cdot S$$

Свойство 3. Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать.

Доказательство. Пусть

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = S;$$
$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots = \Phi,$$

тогда ряд

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) + \ldots$$

также сходится и имеет сумму $S \pm \Phi$, так как предел суммы равен сумме пределов

$$\lim_{n\to\infty} \left(S_n \pm \Phi_n\right) = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} \Phi_n = S \pm \Phi.$$

Замечание. При сложении сходящегося и расходящегося ряда суммарный ряд тоже будет расходится.

Признаки сходимости числовых рядов с положительными членами

Числовой ряд называется рядом с положительными членами или просто положительным рядом, если все члены ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

больше нуля $u_n > 0$. Рассмотрим признаки сходимости для положительных рядов.

Первый признак сравнения. Пусть даны три ряда:

ряд, сходимость которого надо определить

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{11.4}$$

сходящийся ряд $v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n + ...$ (11.5)

расходящийся ряд $w_1 + w_2 + w_3 + ... + w_n + ...$ (11.6)

Тогда:

а) если начиная с некоторого номера n, выполняется условие

$$u_n \le v_n \tag{11.7}$$

то из сходимости ряда (11.5) следует сходимость ряда (11.4);

б) если, начиная с некоторого номера n, выполняется условие

$$u_n \ge w_n \tag{11.8}$$

то из расходимости ряда (11.6) следует расходимость ряда (11.4).

Доказательство.

а) Обозначим частичные суммы рядов

$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$
$\Phi_n = v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n$

в силу условия (11.7) имеем $S_n \le \Phi_n$.

По условию ряд (11.5) сходится, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n = \Phi$, следовательно

$\Phi \ge \Phi_n \ge S_n$.

Это означает, что последовательность частичных сумм S_n возрастает (в силу положительности ряда (11.4)) и ограниченна сверху величиной Ф. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует и конечен, а ряд (11.4) сходится.

б) Обозначив частичную сумму ряда (11.6) за W_n

$W_n = w_1 + w_2 + w_3 + ... + w_n$,

в силу (11.8) имеем $S_n \ge W_n$.

По условию ряд (11.6) расходится, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = \infty$, следовательно

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n \ge \lim\limits_{n\to\infty} W_n = \infty$

и ряд (11.4) расходится.

Второй признак сравнения. Пусть даны два ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... \tag{11.9}$$
$$v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n + ... \tag{11.10}$$

и можно указать такие постоянные числа $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$, что, начиная с некоторого достаточно большого n,

$$k_1 \le \frac{u_n}{v_n} \le k_2 \tag{11.11}$$

Тогда ряды (11.9) и (11.10) одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство. Из (11.11) следует, что

$$k_1 v_n \le u_n \le k_2 v_n. \tag{7.12}$$

Если ряд (11.9) сходится, то из левого неравенства (11.12) по первому признаку сравнения вытекает сходимость ряда

$k_1 v_1 + k_1 v_2 + k_1 v_3 + ... + k_1 v_n + ...$

Из сходимости этого ряда, по свойству 2, вытекает и сходимость ряда (11.10).

Предположим теперь, что ряд (11.9) расходится. В этом случае расходится и ряд

$$\frac{u_1}{k_2}+\frac{u_2}{k_2}+\frac{u_3}{k_2}+......+\frac{u_n}{k_2}+......$$

Из правой части (11.11) следует, что $\frac{u_n}{k_2} \le v_n$

Следовательно, по первому признаку сравнения, ряд (7.10) также расходится.

Следствие (предельный признак сравнения). Если для рядов (11.9) и (11.10) выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = r < \infty, \text{ где } r \ne 0, \qquad (11.13)$$

то эти ряды сходятся или расходятся одновременно.

Для сравнения обычно используются следующие эталонные ряды.

Геометрический ряд (ряд геометрической прогрессии)

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ...$$

Геометрический ряд сходится при условии $q < 1$. В противоположном случае ($q \ge 1$) ряд расходится. Например, ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+......+\frac{1}{2^{n-1}}+...,\ q=\frac{1}{2}$$

сходится, а ряд

$$1 + 2 + 4 + ... + 2^{n-1} + ..., q = 2$$

расходится. Можно также сказать, что этот ряд расходится потому, что не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

Обобщенным гармоническим рядом называется ряд

$$a+\frac{a}{2^p}+\frac{a}{3^p}+......+\frac{a}{n^p}+.....$$

Этот ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

Например, ряд

$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+.........+\frac{1}{n^3}+....$ - сходится, а ряд

$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+......+\frac{1}{\sqrt{n}}+.....$ - расходится.

Обобщенный гармонический ряд при $p = 1$ называют просто гармоническим рядом:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}+.....=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Гармонический ряд расходится!

Действительно, сгруппируем члены ряда по степеням 2

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+....+\frac{1}{n}+.....=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+...+\frac{1}{16}\right)+...\geq$$

$$\geq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2}+......=\infty$$

Так как сумма слагаемых в каждой скобке больше $\frac{1}{2}$.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 3^2}+\frac{3}{4\cdot 3^3}+.....+\frac{n}{(n+1)3^n}+.....=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)3^n}.$$

Решение. Сравним общий член этого ряда с геометрическим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$, который сходится. Так как

$$\frac{n}{(n+1)3^n}<\frac{1}{3^n}$$

то, по первому признаку сравнения исследуемый ряд сходится.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+...+\frac{1}{\ln n}+...$$

Решение. Сравнивая общий член этого ряда с общим членом гармонического ряда

$$\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n},$$

заключаем, что этот ряд также расходится (по первому признаку сравнения).

Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2+\ln 2}+\frac{1}{3+\ln 3}+\frac{1}{4+\ln 4}+......+\frac{1}{n+\ln n}+.....=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+\ln n}.$$

Решение. Воспользуемся следствием из второго признака сравнения, сравним с расходящимся гармоническим рядом

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+\ln n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\ln n}{n}}=1$$

При вычислении предела мы использовали правило Лопиталя: предел отношения двух функций с неопределенностью $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ равен пределу

отношения производных $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Сравниваемые ряды ведут себя одинаково, поэтому заключаем, что исследуемый ряд расходится (т.к. гармонический ряд расходится).

Пример 4. Исследовать сходимость ряда

$$2\cdot 1+\frac{1}{2\cdot 2}+2\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 4}+2\frac{1}{5}+\ldots+\frac{2}{2n-1}+\frac{1}{2\cdot 2n}+\ldots .$$

Решение. Рассмотрим отношение членов этого ряда к соответствующим членам гармонического ряда:

- при нечетном n имеем $\frac{2}{n}:\frac{1}{n}=2$,

- при четном n имеем $\frac{1}{2n}:\frac{1}{n}=\frac{1}{2}$.

Следовательно, отношение u_n/v_n ни к какому пределу не стремится. Однако при всех n оно заключено между 1/2 и 2. Поэтому согласно второму признаку сравнения исследуемый ряд ведет себя так же, как и гармонический, т.е. расходится.

Признак Даламбера сходимости рядов с положительными членами. Пусть дан положительный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (11.14)$$

Если отношения последующего члена ряда u_n к предыдущему u_{n-1}, начиная с некоторого значения $n = N$, удовлетворяет неравенству

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \le q < 1, \quad n > N, \qquad (11.15)$$

то ряд (11.14) сходится.

Если же, начиная с некоторого N , имеем

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} > 1, \quad n > N \qquad (11.16)$$

то ряд (11.14) расходится.

Доказательство. Пусть имеет место соотношение (11.15), которое выполняется для всех n. Тогда

$$u_n \le u_{n-1}q,\ u_{n-1} \le u_{n-2}q,\ \ldots,\ u_2 \le u_1q.$$

Отсюда, проводя почленную подстановку, получаем $u_n \le u_1q^{n-1}$

.

Это неравенство означает, что общий член ряда (11.14) не превосходит соответствующего члена сходящегося ($q < 1$) геометрического ряда. В силу первого признака сравнения ряд (11.14) сходится. Пусть имеет место соотношение (11.16). Тогда

$$u_1 < u_2 < u_3 < \ldots < u_{n-1} < u_n < \ldots ,$$

т.е. члены ряда не убывают по мере возрастания n. Следовательно, не выполнено необходимое условие сходимости ряда и ряд (11.14) расходится. Если условие выполняется начиная с некоторого номера n, то это означает, что сходится остаток ряда, а по первому свойству сходится и сам ряд. На практике удобнее пользоваться предельным признаком Даламбера, формулировку которого дадим в виде следствия.

Следствие. (Предельный признак Даламбера). Если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}} = p,$$

то при p < 1 ряд (11.14) сходится, при p > 1 этот ряд расходится.

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{2}{1!}+\frac{4}{2!}+\frac{8}{3!}+\ldots\ldots+\frac{2^n}{n!}+\ldots\ldots=\sum_{n\to 1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$$

Решение. Рассмотрим предел отношения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(n-1)!}{2^{n-1}n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0<1.$$

Следовательно, исследуемый ряд сходится.

Замечание. Если $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}=1$, то признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. В этих случаях надо привлекать другие признаки сходимости ряда.

Знакочередующиеся ряды

Знакочередующимися рядами называются ряды вида

$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots +(-1)^{n+1} u_n + \ldots$ (11.17)

где все $u_n > 0$.

Сходимость таких рядов исследуется по теореме Лейбница: если в знакочередующемся ряде (11.17) все члены таковы, что $u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$. и $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд (11.17) сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена ряда u_1.

Доказательство. Возьмем сумму четного числа первых членов S_{2m}, которая положительна.

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots\ldots + (u_{2m-1} - u_{2m}) > 0,$$

так как выражение в каждой скобке больше нуля. S_{2m} возрастает при росте m, т.к. $S_{2m} = S_{2(m-1)} + (u_{2m-1} - u_{2m}) > S_{2(m-1)}$.

С другой стороны

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5)\ldots\ldots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m} < u_1 .$$

т. е. при росте m S_{2m} возрастает и ограничена сверху. Следовательно, имеет предел $S = \lim_{n\to\infty} S_{2m}$. Нечетные суммы будут иметь тот же предел. Действительно

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2m} + \lim_{n\to\infty} u_{2m+1} = S + 0 = S.$$

Четные и нечетные суммы ряда имеют тот же предел, следовательно, ряд сходится. Теорема доказана.

По знакочередующемуся ряду можно построить соответствующий ему положительный ряд $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + \ldots$. Если такой положительный ряд сходится, то знакочередующийся ряд называют абсолютно сходящимся, в противном случае ряд называют условно сходящимся. В абсолютно сходящемся ряде члены ряда можно переставлять без потери сходимости, в условно сходящемся ряде перестановка членов ряда запрещена, т.к. она может привести к потере сходимости.

11.2. Степенные ряды

Степенным рядом по степеням х называется функциональный ряд вида

$$C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots C_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \,, \qquad (11.18)$$

где C_0, C_1, ... C_n, ... не зависят от переменной x и называются коэффициентами этого ряда.

Если при $x = x_0$ числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n x_0{}^n$ сходится, то x_0 называется точкой сходимости ряда (11.18). Областью сходимости ряда называется множество всех точек сходимости этого ряда.

Степенной ряд (11.18) всегда сходится, по крайней мере, в точке $x = 0$.

Степенной ряд (7.18) сходится в точке x_0 абсолютно, если сходится ряд образованный из модулей членов числового ряда

$$|C_0| + |C_1x_0| + |C_2x_0^2| + \ldots |C_n x_0^n| + \ldots \quad . \qquad (11.19)$$

Найдем область сходимости ряда (11.18), используя признак Даламбера
для положительных числовых рядов. По этому признаку ряд (11.19) сходится, если

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n x_0^n}{C_{n-1}x_0^{n-1}}\right| = |x_0|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n-1}}\right| < 1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера ряд (11.19) заведомо сходится при

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n-1}}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|C_{n-1}|}{|C_n|} \text{ и расходится при } |x| > \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n-1}}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|C_{n-1}|}{|C_n|}\,.$$

Величина

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{|C_{n-1}|}{|C_n|} \qquad (11.20)$$

называется радиусом сходимости ряда степенного ряда. Ряд заведомо сходится в интервале $|x| < R$ или $-R < x < R$, который называется интервалом сходимости.

Признак Даламбера ничего не говорит о сходимости ряда в точках $x = \pm R$. В этих точках сходимость ряда исследовать отдельно.

Исследовать степенной ряд на сходимость означает найти его интервал сходимости и установить сходимость или расходимость ряда в граничных точках интервала, т.е. при $x = R$ и $x = -R$.

Пример. Исследовать на сходимость степенной ряд

$$\frac{x}{2}+\frac{4x^2}{2^2}+\frac{9x^3}{2^3}+....+\frac{n^2x^n}{2^n}+.....=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(nx)^2}{2^n}.$$

Решение. Используя формулу (7.20), имеем

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|C_{n-1}|}{|C_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^2 2^n}{2^{n-1}n^2}=2.$$

Интервал сходимости данного ряда характеризуется неравенством $|x| < 2$. Исследуем сходимость ряда в граничных точках $x = \pm 2$. Очевидно, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2(\pm 2)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(\pm 1)^n n^2 .$$

Оба эти ряда расходятся, так как не выполняется необходимое условие сходимости численных рядов. Следовательно, область сходимости данного степенного ряда совпадает с интервалом сходимости.

Пример 1. Найти область сходимости следующего ряда

$$1 + x + 2^2x^2 + 3^3x^3 + ... + n^nx^n + ... = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n .$$

Решение. По формуле (7.20) найдем

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}=0 .$$

Следовательно, ряд сходится только в одной точке $x = 0$.

Пример 2. Найти область сходимости следующего ряда:

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+....=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} .$$

Решение. Так как

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-1)!}=\lim_{n\to\infty} n=\infty,$$

то ряд сходится при всех конечных значениях x, т.е. $-\infty < x < \infty$.

Основные свойства степенных рядов

1) Во всех точках, лежащих внутри интервала сходимости, сумма степенного ряда является непрерывной функцией переменной x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = S(x)$$

2) Степенной ряд можно почленно интегрировать внутри интервала сходимости:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{x_1}^{x_2} C_n x^n dx=\int_{x_1}^{x_2} S(x)dx.$$

3) Внутри интервала сходимости степенной ряд можно почленно дифференцировать:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x)' = S'(x).$$

При почленном интегрировании и дифференцировании степенных рядов их интервалы сходимости не меняются.

Пример. Найти сумму ряда

$$S(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n} + ... \qquad (11.21)$$

Решение. Найдем сначала интервал сходимости этого ряда

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1$$

Следовательно, интервал сходимости ряда (-1, +1). Продифференцировав (11.21), имеем

$S'(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$.

Правая часть этого выражения - геометрический ряд с $q = x$, который сходится при $|x|<1$. Поэтому, используя формулу суммы сходящейся геометрической прогрессии, получим

$$S'(x) = \frac{1}{1-x}$$

Отсюда сумму исходного ряда найдем интегрированием

$$S(x) = \int \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-x) + C.$$

Найдем C. Из (7.21) следует, что $S(0) = 0$. Следовательно,

$0 = - \ln (1-0) + C, \quad C = 0.$

Таким образом, $S(x) = - \ln (1- x) = \ln \dfrac{1}{1-x}$.

Ряды по степеням (*x* - *a*). Наряду со степенными рядами относительно переменной x часто рассматривают степенные ряды по переменной $(x - a)$, т. е. ряды вида

$$C_0 + C_1(x - a) + C_2(x - a)^2 + ... + C_n (x - a)^n + ... \qquad (11.22)$$

Очевидно, что этот ряд подстановкой $y = (x - a)$ превращается в ряд типа (7.18). Поэтому, если степенной ряд (11.18 имеет интервал сходимости $-R < x < R$, то соответствующий ряд вида (11.22) имеет интервал сходимости $(a - R) < x < (a + R)$, центр которого расположен в точке x = a.

Пример. Найти интервал сходимости следующего ряда

$$(x^3-1) + \frac{(x^3-1)^2}{2} + \frac{(x^3-1)^3}{3} + ... + \frac{(x^3-1)^n}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^3-1)^n}{n}.$$

Решение. Найдем радиус сходимости ряда. В соответствии с (7.20) имеем

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{C_{n-1}}{C_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-1} = 1.$$

Отсюда $-1 < (x^3 -1) < 1$ или $0 < x^3 < 2$.

Следовательно, интервал сходимости ряда $0 < x < \sqrt[3]{2}$.

Ряд Тейлора. Пусть функция $f(x)$ в точке $x = a$ имеет производные любого порядка. Предположим, что имеется сходящийся степенной ряд

$$C_0 + C_1(x - a) + C_2(x - a)^2 + ... + C_n(x - a)^n + = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n, \qquad (11.23)$$

сумма которого равна функции $f(x)$, т. е.

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n = f(x). \qquad (11.24)$$

Найдем коэффициенты такого ряда. Очевидно, что $f(a) = C_0$. Продифференцировав (11.24) в точке $x=a$, имеем $C_1 = f'(a)$. Продифференцировав (11.24) в точке $x=a$ дважды, получим $C_2 = f''(a)/2$. Продолжая дифференцирование равенства (11.24) в точке $x = a$, можно убедится, что коэффициенты ряда (11.23) находятся по формуле

$$C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Степенной ряд вида

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + ...$$

называется рядом Тейлора для функции $f(x)$.

Теорема. Для того чтобы бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$ являлась суммой составленного для нее ряда Тейлора, необходимо и достаточно, чтобы остаточный член в формуле Тейлора (2.25) стремился к нулю при $n \to \infty$.

Если для всех значений x из некоторой окрестности точки $x = a$ имеет место равенство

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + ...$$

то функция $f(x)$ называется разложимой в ряд Тейлора в окрестности точки $x = a$ (или по степеням $(x - a)$).

В частном случае при $a = 0$ ряд Тейлора имеет вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ...$$

и его называют рядом Маклорена.

Пример 1. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = e^x$.

Поскольку $e^x = (e^x)' = (e^x)'' = ...(e^x)^{(n)}$, то при $x = 0$ $f(0) = 1$; $f'(0) = 1$; $f''(0) = 1$; ...; $f^{(n)}(0) = 1$; ... .

Следовательно, ряд Тейлора функции $y = e^x$ в окрестности точки $x = 0$ имеет вид

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^2}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \qquad (11.25)$$

Ряд (11.25) сходится на всей числовой оси к функции $y = e^x$.

Пример 2. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = \sin x$.

Решение. Для функции $f(x) = \sin x$ имеем:

$$f'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f''(x) = -\sin(x) = \sin(x+\pi), \dots \quad f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно, ряд Тейлора для sin x:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

или

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Аналогично получается разложение для функции cos x:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

или

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Подобным образом можно получить разложения в ряд Тейлора и многих других функций.

Учебный модуль восемь. Дифференциальные уравнения

Тема 21. Дифференциальные уравнения первого порядка. Определение дифференциального уравнения первого порядка. Определение решения. Начальные условия. Теорема существования и единственности решения. Основные виды дифференциальных уравнений: уравнения с разделяющимися переменными, линейные уравнения.

Лекция 12. Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка - это уравнение, в которое входят независимая переменная, неизвестная функция и первая производная этой функции. Общий вид дифференциального уравнения первого порядка

$$F(x, y, y') = 0. \tag{12.7}$$

Здесь F - заданная функция трех аргументов. Она может не зависеть от x или y (или от обеих переменных), но должна содержать y'. Если уравнение (12.7) разрешить относительно y', то получим *разрешенный вид*

$$y' = f(x, y), \tag{12.8}$$

где f - заданная функция от x и y или правая часть уравнения (12.8). В дальнейшем мы будем рассматривать только уравнения в разрешенном виде. Решение дифференциального уравнения (12.8) - это функция $y = \varphi(x)$, которая, будучи подставлена в это уравнение, обращает его в тождество:

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Пример 1. Дано уравнение $y' + y\,ctg\,x - 2\cos x = 0$.

Покажем, что функция $y = \sin x$ является его решением. Для этого подставим в данное уравнение вместо y и y′ функции sinx и (sinx)′ = cosx. Получим

$\cos x + \sin x \operatorname{ctg} x - 2\cos x = \cos x + \cos x - 2\cos x \equiv 0.$

Уравнение обратилось в тождество.

Функция

$$y = \varphi(x, C) \tag{12.9}$$

называется общим решением уравнения (12.7), если она является решением этого уравнения при всех значениях произвольной постоянной С.

Если общее решение задано в неявном виде $\varphi(x, y, C) = 0$, то оно называется общим интегралом. Частное решение уравнения (12.7) - это решение, которое получается из общего (12.9) при конкретном значении С.

Для дифференциального уравнения (12.7) задача Коши формулируется так: среди всех решений уравнения найти решение $y = y(x)$, удовлетворяющее условию

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \tag{12.10}$$

где x_0, y_0 - заданные числа.

Условие (121.10) называется начальным условием, а числа x_0, y_0 - начальными значениями.

Уравнения с разделяющимися переменными - это уравнение, правая часть которого f(x,y) есть произведение двух сомножителей f(x) и g(y), каждый из которых зависит только от одной переменной

$$y' = f(x) \cdot g(y). \tag{12.11}$$

Уравнения с разделяющимися переменными интегрируются следующим образом: y′ заменяется на $\frac{dy}{dx}$, затем умножаются обе части (12.11) на $\frac{dx}{g(y)}$.

Получим:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \tag{12.12}$$

Дифференциалы переменных x и y, и соответствующие функции стоят отдельно, т.е переменные отделены.

Если обозначить G(y) = $\int \frac{dy}{g(y)}$, F(x) = $\int f(x)dx$, то уравнение (12.12) можно переписать в виде

$$dG(y) = dF(x).$$

Так как из равенства дифференциалов двух функций следует, что сами функции отличаются на произвольное постоянное слагаемое, то

$$G(y) = F(x) + C$$

или

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C \qquad (12.13)$$

Выражение (12.13) представляет собой общий интеграл уравнения (12.11). Вычислив интегралы в (12.13), получим решение исходного уравнения

Пример 2. Решить уравнение $xy' + y = 0$.

Решение. Разрешим уравнение относительно y': $y' = -\frac{y}{x}$

Здесь $f(x) = -1/x$, а $g(y) = y$.

Заменим в этом уравнении y' на $\frac{dy}{dx}$ и умножим обе части уравнения на $\frac{dx}{y}$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Интегрируя, находим $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C_1$,

где C_1 - произвольная постоянная.

Отсюда следует ответ: $ln\,|y| = -\,ln\,|x| + C_1$. В данном случае удобно вместо C_1 написать $C_1 = ln\,C_2$ $(C_2 > 0)$.

Тогда $ln\,|y| = -\,ln\,|x| + ln\,C_2$ или

$$|y| = \frac{C_2}{|x|} \Rightarrow y = \frac{\pm C_2}{x}$$

Так как $\pm C_2$ принимает любые значения, то обозначая $\pm C_2 = C$, окончательно получим

$$y = \frac{C}{x}$$

где C - произвольная постоянная.

Эта формула и дает общее решение заданного уравнения. Найдем теперь частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=4} = \frac{1}{2}$. Для этого в равенство $y = \frac{C}{x}$ подставим вместо x и y значения 4 и $\frac{1}{2}$. Получим $\frac{1}{2} = \frac{C}{4}$. Отсюда следует, что C = 2. Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y = \frac{2}{x}$

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно искомой функции y(x) и ее производной y′(x). В общем случае оно имеет вид

$$y' + p(x)y = f(x). \qquad (12.14)$$

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется линейным уравнением без свободного члена (правой части) или линейным однородным уравнением. Итак,

$$y' + p(x)y = 0$$

линейное однородное уравнение (оно же уравнение с разделяющимися переменными).

Если $f(x) \neq 0$, то уравнение (12.14) называется линейным неоднородным уравнением.

Например, уравнение $y' - y\cos^2 x = x^2$ является линейным неоднородным уравнением. Однородное по отношению к нему будет уравнение $y' - y\cos^2 x = 0$. Уравнение (12.14) можно интегрировать разными методами. Мы рассмотрим метод Бернулли. Он состоит в следующем. В уравнении (12.14) делаем замену:

$$y = u(x) \cdot v(x), \tag{12.15}$$

Дифференцируя по правилу «производная произведения двух функций», имеем

$$y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \tag{12.16}$$

Подставим в уравнение (12.14) вместо y и y' их выражения из (12.15) и (12.16), получим

$$u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + p(x)u(x)v(x) = f(x)$$

или

$$u'v + u[v' + p(x)v] = f(x). \tag{12.17}$$

Так как одну из функций в (12.17) можно выбрать произвольно, то функцию v выберем таким образом, чтобы коэффициент при u обратился в нуль, т.е.

$$v' + p(x)v = 0. \tag{12.18}$$

Уравнение (12.18) относительно функции $v(x)$ является уравнением с разделяющимися переменными. Поэтому из (12.18) имеем:

$$\frac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -p(x)v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx$$

Интегрируя, находим

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx + C \Rightarrow \ln(v) = -\int p(x)dx + C.$$

Так как функция v - это любая функция, удовлетворяющая (12.18), то полагаем C = 0. Итак,

$$ln(v) = -\int p(x)dx \ \Rightarrow \ v = e^{-\int p(x)dx}.$$

Представляя найденную функцию $v(x)$ в уравнение (12.17), получим

$$u'(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x).$$

Отсюда следует

$$u' = e^{-\int p(x)dx} \cdot f(x) \Rightarrow du = e^{-\int p(x)dx} \cdot f(x)dx.$$

Интегрируя, получим

$$u = \int e^{-\int p(x)dx} \cdot f(x)dx + C, \tag{12.19}$$

где C - произвольная постоянная. Для того, чтобы найти $y(x)$, умножим найденную $u(x)$ на $v(x)$:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int e^{-\int p(x)dx} \cdot f(x)dx + C\right). \qquad (12.20)$$

Формула (12.20) дает общее решение дифференциального уравнения (12.14).

Задача. Найти общее решение уравнения

$$y' - \frac{2xy}{x^2+3} = \left(x^2+3\right)\cos x$$

Решение. Это линейное неоднородное уравнение, где

$$p(x) = -\frac{2x}{x^2+3}, \quad f(x) = \left(x^2+3\right)\cos x.$$

Выполнив замену $y = u \cdot v$, получаем $y' = u'v + uv'$.

Заданное дифференциальное уравнение перепишем в виде

$$u'v + uv' - \frac{2x}{x^2+3}uv = \left(x^2+3\right)\cos x$$

или

$$u'v + u\left[v' - \frac{2x}{x^2+3}v\right] = \left(x^2+3\right)\cos x$$

Приравняем выражение в скобках нулю:

$$v' - \frac{2x}{x^2+3}v = 0$$

Получили уравнение для функции $v(x)$ - уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируем его:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2x}{x^2+3}v = 0 \ \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{2x}{x^2+3}dx \ \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = \int\frac{2x}{x^3+3}dx \Rightarrow \ln(v) = \int\frac{2xdx}{x^2+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(v) = \ln\left(x^2+3\right) \Rightarrow v = x^2+3.$$

Подставляя функцию v(x) в уравнение, найдем уравнение для функции u(x):

$u'(x^2 + 3) = (x^2 + 3)cosx$.

Отсюда следует

$u' = cos(x)$ или $u = \int \cos(x)dx + C \ \Rightarrow u = sin(x) + C$.

Теперь находим общее решение заданного уравнения $y(x)$:

$y = uv \ \Rightarrow y = (sin(x) + C)(x^2 + 3)$.

Тема 22. Дифференциальные уравнения второго порядка. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Определение дифференциального уравнения. Определение решения. Начальные условия. Теорема существования и единственности решения.

Тема 23. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения. Теоремы о свойствах решений. Теоремы об общем решении. Уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Метод решения уравнений с постоянными коэффициентами.

Дифференциальное уравнение второго порядка - это уравнение, в которое входят независимая переменная, неизвестная функция, первая и вторая производные этой функции. Общий вид дифференциального уравнения первого порядка

$$F(x, y, y', y'') = 0. \qquad (12.21)$$

Здесь F - заданная функция четырех аргументов. Она может не зависеть от x , y и y'(или от обеих переменных), но должна содержать y''.

Если уравнение (12.21) разрешить относительно y'' , то получим *разрешенный вид*

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad (12.22)$$

где f - заданная функция от x, y и y'. В дальнейшем мы будем рассматривать только уравнения в разрешенном виде.

Решение дифференциального уравнения (11.22) - это функция $y = \varphi(x)$, которая, будучи подставлена в это уравнение, обращает его в тождество:

$$y'' = f(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \qquad (12.23)$$

Определение. Общим решением уравнения второго порядка называется такая функция

$$y = \varphi(x, C_1, C_2) \ , \qquad (12.24)$$

которая при любых значениях произвольных постоянных C_1 и C_2 является решением этого уравнения.

Если заданы начальные условия (это называется задача Коши) $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\big|_{x=x_0} = y_1$, то подставляя начальные условия в общее решение, получим частное решение. Конкретные значения постоянных C_1 и C_2 находятся из системы

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2) \\ y_0' = \varphi(x_0, C_1, C_2) \end{cases}$$

Определение. Линейным неоднородным уравнением второго порядка называется уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \ , \qquad (12.25)$$

где $p(x)$, $q(x)$ – коэффициенты уравнения, а $f(x)$ – правая часть уравнения.

Если $f(x) = 0$, то уравнение называется однородным

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (12.26)$$

Если коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ постоянны, т.е. не зависят от x, то это уравнение называют уравнением с постоянными коэффициентами и записывают его так:

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0\,. \qquad (12.27)$$

Решением такого уравнения может быть только функция не меняющая свой вид при дифференцировании, т. е.

$$y = e^{kx} \ , y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx} \quad . \qquad (12.28)$$

Подставляя функцию и производные в уравнение (3.7), получим
$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$.

В этом выражении $e^{kx} \neq 0$ при любых значениях k и x, поэтому на него можно сократить.

Определение. Уравнение

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (12.29)$$

которое получается из линейного однородного уравнения, называется характеристическим уравнением.

Известно, что квадратное уравнение $k^2 + pk + q = 0$ имеет решение, зависящее от дискриминанта $D = p^2 - 4q$:

Если $D > 0$, то корни k_1 и k_2 - действительные различные числа.

$k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{D}}{2}$. Следовательно решениями будут функции $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$.

В качестве общего рещения берется их линейная комбинация с произвольными постоянными C_1 и C_2

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \ . \qquad (12.30)$$

Если $D = 0$, то $k_1 = k_2$, $k_{1,2} = \dfrac{-p}{2} \equiv k$. Тогда в качестве общего решения берется следующее выражение

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} \qquad (12.31)$$

3.Если $D < 0$, то решениями уравнения будут два комплексных числа

$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, где введены обозначения $\alpha = \dfrac{-p}{2}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{-D}}{2}$, а $i = \sqrt{-1}$.

В этом случае можно использовать формулу (12.30), подставляя $k_1 = \alpha + i\beta$, а $k_2 = \alpha - i\beta$, но удобнее сделать преобразование и записать общее решение в виде

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) \qquad (12.32)$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Решение. Ищем решение уравнения в виде $y = e^{kx}$, тогда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$ и, подставляя в исходное уравнение получим $k^2 e^{kx} - 4ke^{kx} + 3e^{kx} = 0$. Так как $e^{kx} \neq 0$, то на него можно сократить и мы получим $k^2 - 4k + 3 = 0$.

Находим его корни

$k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1;$

$k_1 = 3, \quad k_2 = 1.$

Корни характеристического уравнения вещественные, различные, значит, общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$

или

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{x}.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0.$

Решение. Составляем характеристическое уравнение (см. пример 1)

$$k^2 - 4k + 4 = 0.$$

Решаем его

$$k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2.$$

Корни характеристического уравнения вещественные равные. Общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = (c_1 + c_2 x)\, e^{kx}$$

или

$$y = e^{2x}(c_1 + c_2 x).$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 13y = 0.$

Решение. Составляем характеристическое уравнение (см. пример 1)

$$k^2 - 4k + 13 = 0;$$

$$k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i = \alpha \pm i\beta.$$

Корни характеристического уравнения комплексные сопряженные, значит, общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) = e^{2x}(C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)$$

Пример 4. Найти частные решения однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

$a)\quad y'' - 5y' + 4y = 0,$ где $\left. y\right|_{x=0} = 5, \quad \left. y'\right|_{x=0} = 8$

$b)\quad y'' + 4y = 0,$ где $\left. y\right|_{x=0} = 0, \quad \left. y'\right|_{x=0} = 2.$

Решение. а) находим общее решение (см. пример 1)

$$k^2 - 5k + 4 = 0;$$

$$k_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2};$$

$$k_1 = 4, \quad k_2 = 1.$$

Общее решение $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{x}.$

Дальше решаем задачу Коши. Постоянные $c_1,\ c_2$ найдем с помощью начальных условий, вычислив предварительно производную от общего решения

$$y' = 4c_1 e^{4x} + c_2 e^{x}.$$

Подставляя начальные условия в общее решение и его производную, получим

$$c_1 + c_2 = 5 \qquad \left(\left. y\right|_{x=0} = 5\right);$$

$$4c_1 + c_2 = 8 \qquad \left(\left. y'\right|_{x=0} = 8\right).$$

Из этой системы находим $c_1 = 1,\ c_2 = 4.$

Подставив значения постоянных в общее решение, получим искомое частное решение

$$y = e^{4x} + 4e^{x}.$$

в) решаем второе уравнение. Его характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + 4 = 0.$$

Находим корни: $k_{1,2} = \pm 2i.$ Общее решение $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$

Вычисляем: $y' = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x.$

Подставляя начальные условия, получаем

$0 = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0; \quad c_1 = 0;$

$2 = -2c_1 \sin 0 + 2c_2 \cos 0; \quad c_2 = 1.$

Частное решение $y = \sin 2x.$

Общим решением неодногодного уравнения будет сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Укажем способ, позволяющий найти частное решение неоднородного уравнения по виду правой части. Заметим, что это возможно лишь в случаях, когда правая часть уравнения является функцией определенного вида.

Пусть $f(x) = Ae^{mx}, m \neq k_1 . m \neq k_2$

Тогда частное решение ищут в виде $y_{част} = Be^{mx}$. Коэффициент В находят непосредственной подстановкой частного решения в уравнение. Общее решение имеет вид

$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + Be^{mx}$

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots a_1 x + a_0$, $k_{1,2} \neq 0$.

Тогда частное решение ищут в виде

$y_{част}(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0$.

Если $f(x) = A \sin bx + B \cos bx, \ b \neq \beta$, то

$y_{част}(x) = M \sin bx + N \cos bx$.

Если справа стоит сумма или произведение двух функциий, то в качестве частного решения берется соответственно сумма или произведение соответствующих функций.

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y = xe^{-x}$.

Решение. Находим сначала общее решение соответствующего однородного уравнения

$y'' - 2y = 0.$

Характеристическое уравнение $k^2 - 2 = 0.$ Его корни $k_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$

Общее решение однородного уравнения

$y = c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}.$

Теперь следует найти частное решение $y_{част}(x)$ неоднородного уравнения. Правая часть $f(x) = xe^{-x}$, значит $y_{част}(x)$ ищем в форме $y_{част}(x) = (Ax + B)\, e^{-x}$, т.к. $k = -1$ не является корнем характеристического уравнения.

Требуется найти неизвестные коэффициенты А и В. Для определения А и В дифференцируем дважды $y_{част}(x)$

$y_{част}(x)' = Ae^{-x} - (Ax + B)\, e^{-x},$

$y_{част}(x)'' = -2Ae^{-x} + (Ax + B)\, e^{-x}$

и подставляем это в данное неоднородное уравнение:

$-2Ae^{-x} + (Ax + B)e^{-x} - 2(Ax + B)e^{-x} \equiv xe^{-x}.$

Так как $e^{-x} \neq 0,$ то сократив e^{-x}, получим тождественное равенство двух полиномов

$-2A - Ax - B \equiv x \Rightarrow -Ax + (-B - 2A) \equiv x.$

Значения А и В найдем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях

при X : $-A = 1 \Rightarrow A = -1;$

при X$^\circ$: $-2A - B = 0 \Rightarrow B = -2A = 2.$

Подставляем найденные А и В в $\overline{y}$

$\overline{y}=(x+2)\,e^{-x}=-(x-2)\,e^{-x}.$

Общее решение неоднородного уравнения

$y=\mathrm{Y}+\overline{y}=c_1e^{x\sqrt{2}}+c_2e^{-x\sqrt{2}}-(x-2)\,e^{-x}.$

Пример 6. Найти общее решение уравнения $y''+y'-2y=8\sin 2x.$

Решение. Соответствующее однородное уравнение

$y''+y'-2y=0.$

Составляем характеристическое уравнение и решаем его

$$k^2+k-2=0;\quad k_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+2};\quad k_1=1;\quad k_2=-2;$$

$y=c_1e^x+c_2e^{-2x}.$

Правая часть данного неоднородного уравнения

$f(x)=8\sin 2x.$

Следовательно, частное решение $y_{част}(x)$ разыскиваем в виде

$y_{част}(x)=A\cos 2x+B\sin 2x,$

т.к. $k=2$ не является решением характеристического уравнения.

Дифференцируем и подставляем это решение в неоднородное уравнение

$y_{част}(x)'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x;$

$y_{част}(x)''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x;$

$-4A\cos 2x-4B\sin 2x-2A\sin 2x+2B\cos 2x-2B\sin 2x-2A\cos 2x\equiv 8\sin 2x.$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях в левой и правой частях тождества

при $\sin 2x$: $\quad -4B-2A-2B=8;$

при $\cos 2x$: $\quad -4A+2B-2A=0.$

Из этой системы находим А и В

$$-6B-2A=8;\quad 3B+A=-4;\quad B=3A;\quad A=-\frac{2}{5};$$

$$-6A+2B=0;\quad 3A-B=0;\quad B=-\frac{6}{5};$$

$$y_{част}(x)=-\frac{2}{5}\cos 2x-\frac{6}{5}\sin 2x.$$

Общее решение

$$y=c_1e^x+c_2e^{-2x}-\frac{2}{5}(\cos 2x+3\sin 2x).$$

Пример 7. Найти частное решение уравнения $y''+4y=\sin x,$ удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=0}=1,\quad y'\big|_{x=0}=1.$

Решение. Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, необходимо получить сначала общее решение данного неоднородного уравнения. Находим его (см. пример 6)

$k^2+4=0,\quad k_{1,2}=\pm 2i,\quad y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x;$

$y_{част}(x)=A\sin x+B\cos x,\quad y_{част}(x)'=A\cos x-B\sin x;$

$y_{част}(x)''=-A\sin x-B\cos x.$

Подставляем $y_{част}(x)$ в уравнение

$-A\sin x-B\cos x+4A\sin x+4B\cos x=\sin x;$

$$-A+4A=1,\quad 3A=1,\quad A=\frac{1}{3};$$

$$-B+4B=0, \quad 3B=0, \quad B=0;$$

$$y_{част}(x)=\frac{1}{3}\sin x.$$

Искомое частное решение будем находить из общего. Общее решение неоднородного уравнения

$$y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{3}\sin x;$$

$$y'=-2c_1\sin 2x+2c_2\cos 2x+\frac{1}{3}\cos x.$$

Подставляем начальные условия. При $x=0$ имеем

$$1=c_1, \quad 1=2c_2+\frac{1}{3}; \quad c_2=\frac{1}{3}.$$

Найденные постоянные подставляем в общее решение неоднородного уравнения

$$y=\cos 2x+\frac{1}{3}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin x$$

искомое частное решение.

Учебный модуль 9. Теория вероятности. Тема 20. Случайные события. Алгебра событий. Вероятностное пространство. Определения вероятности события. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формулы полной вероятности и Байеса. Испытания Бернулли.

Лекция 18. Случайные события. Алгебра событий. Вероятностное пространство. Определения вероятности события.

Теория вероятности это раздел математики, изучающий массовые закономерности случайных явлений независимо от их конкретной природы и дающий методы количественной оценки влияния случайных факторов на различные явления.

Основной принцип теории вероятностей состоит в том, что при изучении массовых явлений возникают новые закономерности. Так при одном бросании игральной кости может выпасть любое из первых шести чисел, то же самое можно сказать и про результаты других бросаний. Однако при большом числе бросаний можно с уверенностью ожидать, что выпадение, например, числа три будет наблюдаться в одной шестой части всех бросаний, а выпадение чисел кратных трем, т. е. «3 или 6» - в одной трети всех попыток.

Элементы комбинаторики. Основной задачей комбинаторики является определение числа подчиненных тем или иным правилам комбинаций (наборов или соединений), которые можно составить из заданного множества (набора) объектов. Природа элементов, входящих во множество может быть любой, например, какие-то предметы, или люди, или числа и т. п.

Пусть задано множество A из n объектов $A=\{a_1,a_2,....a_n\}$. Последовательность произвольных элементов $\{a_1, a_2, ..., a_r\}$ называется выборкой объема r из исходного множества A. В комбинаторике выборку называют соединением. Возможны следующие варианты: объект может выбираться только один раз, т. е. после выбора он назад не возвращается, или несколько раз, это означает, что объект выбирается и, потом, снова возвращается в исходное множество. Во втором случае объем выборки может превосходить объем исходного множества A. Далее, если выборка меняется при перемене местами двух элементов, то выборка называется упорядоченной, в противном случае - неупорядоченной. Число появлений одного и того же элемента a_i называется его кратностью и обозначается $m(a)$. Типичным примером выборки является слово.

Две основные задачи, рассматриваемые в теории соединений:

а) составление всех возможных соединений данного вида;

б) вычисление количества всех возможных соединений данного вида.

Для решения первой задачи используются следующие правила.

Правило суммы (правило сложения):

Если объект А можно выбрать из некоторого набора элементов m способами, а объект В – n способами, то осуществить выбор одного из этих объектов - объекта А или В, можно $m + n$ способами.

$N_1 = m + n$. (18.1)

Пример. Пусть a – число, делящееся на 2; b – число, делящееся на 3. Сколькими способами можно выбрать или a или b из множества чисел $M = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Решение. Число a можно выбрать двумя способами $\{2; 4\}$, а число b одним способом $\{3\}$, тогда по правилу суммы $N = n_1 + n_2 = 2 + 1 = 3$.

Если способы выбора объекта типа a совпадают со способами выбора объекта типа b, то из формулы (18.1) следует вычесть число k таких совпадений:

$N_2 = m + n - k$. (18.2)

Пример. Пусть a - число, делящееся на два; b - число, делящееся на три. Сколькими способами можно выбрать или a, или b, если задано множество $M_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

Решение. По формуле (18.2) имеем: $m = 3$ (числа 2, 4 и 6) и $n = 2$ (числа 3 и 6), $k = 1$, так как число 6 делится на 2 и 3. $N_2 = 3 + 2 – 1 = 4$.

Правило произведения (умножения):

Если объект А можно выбрать m способами, а объект В – n способами, то выбор пары (А, В) можно осуществить $m \times n$ способами.

$N_3 = m \times n$. (18.3)

Пример. На две главные роли в фильме пробуются 4 актёра M_1, M_2, M_3, M_4 и 2 актрисы W_1 и W_2. известно, что M_1 и W_2 не подходят друг другу по росту, а M_4 и W_1 – психологически несовместимы. Сколько имеется вариантов состава исполнителей?

Решение. Всего возможно 8 пар $8 = 4 \times 2$, но две пары недопустимы. Итого

$N_3 = 8 \cdot 2 – 2 = 6$.

Пример. Имеются цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5. Сколько четырехзначных чисел можно составить из них?

Решение: $N = 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1080$.

Замечание. Правила суммы и произведения можно распространять на любое число объектов.

Рассмотрим самое простое соединение. Пусть исходное множество из n элементов разбито на k групп (наборов), содержащих n_1, n_2, ... , n_k элементов каждая, т.е. первый набор из n_1 элементов, второй из n_2 элементов и т.д. Сколько различных соединений можно составить, если из каждого набора надо взять только один элемент? Очевидно, что каждый элемент первого набора может встретиться в соединении с каждым элементом второго набора и таких пар будет $n_1 \cdot n_2$. Каждая такая пара может встретиться с каждым элементом третьего набора, т. е. разных троек уже будет $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$. Если обозначить за N число всех возможных соединений по одному элементу из каждого из k наборов, то получим

$N = n_1 \cdot n_2 \cdot ... n_k$. (18.3)

Пример 1. В некотором городе телефонные номера состоят из буквы и пяти цифр. Буква может быть только А, В или Г. Первая цифра бывает 2, 3, 4 или 5, а остальные цифры могут быть любые. Сколько телефонов может быть установлено в этом городе?

Решение. Первый набор состоит из трех букв А, В или Г, т.е. $n_1 = 3$, второй - из четырех цифр 2, 3, 4 или 5, $n_2 = 4$. Следующие четыре набора содержат по 10 цифр, т.е. $n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = 10$. Тогда всего различных номеров может быть $N = 3\times4\times10\times10\times10\times10 = 120\,000$.

В частном случае, если все k наборов содержат одинаковое количество элементов m, то

$N = m^k$ (18.4)

Пример 2. Бросают две игральных кости. Сколько различных пар чисел может выпасть? (Нужно учесть, что 1 на первой кости и 2 на второй или 2 на первой и 1 на второй - это разные пары, т. е. разные соединения. Это легко увидеть, если кости разного цвета).

Решение. У нас $k = 2$. А так как у игральной кости, имеющей форму кубика, шесть граней, то $m = 6$, поэтому

$N = 6^2 = 36$.

Соединения, рассматриваемые в комбинаторике, называются: *перестановки, размещения и сочетания.*

Перестановки. Перестановками из n – элементов называются комбинации из n элементов, которые отличаются друг от друга *только порядком расположения* элементов.

Количество возможных перестановок вычисляется по формуле

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot .... \cdot 1 = n! \qquad (18.5)$$

Действительно:

1-ый элемент можно выбрать n – способами;

2-ой – (n-1) способами;

3-ий – (n-2) способами … и т.д.

По правилу произведения получим $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot .... \cdot 1$. Такое произведение обозначается $n!$

Замечание. Если рассматривается произведение первых натуральных только четных или только нечетных чисел, то такие произведения называются двойными факториалами и обозначаются так:

$2k \times (2k\text{-}2) \ldots 6 \times 4 \times 2 \equiv (2k)!!$

$(2k+1) \times (2k\text{-}1) \ldots 5 \times 3 \times 1 \equiv (2k+1)!!$

Замечание. Если рассматривается произведение первых натуральных только четных или только нечетных чисел, то такие произведения называются двойными факториалами и обозначаются так:

$2k \times (2k\text{-}2) \ldots 6 \times 4 \times 2 \equiv (2k)!!$

$(2k+1) \times (2k\text{-}1) \ldots 5 \times 3 \times 1 \equiv (2k+1)!!$

Пример 1. Сколькими способами можно расставить 5 судов у причальной стенки?

Решение. P_5=5!=120

Пример 2. Имеются карточки с буквами ДРУГ. Сколько «слов» можно составить из этих букв?

Решение: $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

Размещения. Название "размещение" произошло от задачи: разместить k предметов в n пронумерованных ячейках. Размещением из n – элементов по k – элементов называются комбинации из k – элементов, которые отличаются друг от друга *составом элементов и/или порядком их расположения.* Формула размещения k элементов по n ячейкам:

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}_{k \text{ сомножителей}} = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (18.6)$$

Пример 1. Элементы *а ,в, с* разместить по два элемента.

Решение. Возможно 6 вариантов $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$. Это *ав,ва,ас,са,вс,св* .

Пример 2. Сколько можно составить семизначных телефонных номеров, в каждом из которых ни одна цифра не повторяется?

Решение: $A_{10}^7 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 604800$.

Сочетания. Сочетания из n-элементов по k – элементам называется комбинацией из k-элементов, которые отличаются друг от друга *только составом* элементов (хотя бы одним элементом). В отличие от размещения, порядок расположения элементов внутри комбинации не имеет значения. Поэтому количество комбинаций при размещении $A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$ уменьшается на количество перестановок k!

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}; \qquad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \tag{18.7}$$

Для сочетаний справедливо правило симметрии: $C_n^k = C_n^{n-k}$. Например: $C_{25}^{23} = C_{25}^{2}$.

Для сочетаний существует рекуррентная формула

$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m}$.

По определению $C_0^0 = 1$; $C_n^m = 0$ при $n < m$ или при $m < 0$ и $n > 0$.

Числа C_n^m часто условно записывают в следующем виде $\binom{m}{n}$.

Хотя величина C_{-n}^m не имеет комбинаторного смысла, понятие чисел C_n^m можно распространить на отрицательные значения n, а именно:

$C_{-n}^m = (-1)^m C_{n+m-1}^m$.

Пример 1. В ящике 10 шаров. Сколькими способами можно достать 3 шара?

Решение: $C_{10}^3 = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3!} = 120$.

Пример 2. В розыгрыше первенства по футболу принимают участие 16 команд, при этом любые две команды играют между собой только 1 матч. Сколько всего календарных игр?

Решение: $C_{16}^2 = \dfrac{16\cdot 15}{2!} = 120$.

Пример 3. Читатель отобрал по каталогу 8 книг. Однако в библиотеке выдают одному читателю не более 5 книг. Сколько альтернатив взять книги есть у этого читателя?

Решение. Поскольку читатель отобрал книг больше разрешенного числа, то он должен выбрать из них 5 книг. Естественно, что все книги разные и все рано в каком порядке их взять. Следовательно, число вариантов в выборе книг равно

$C_8^5 = \dfrac{8!}{5!3!} = 56.$

Сочетания с повторениями (с возвратами) $\overline{C_n^k}$ – результат последовательного выбора k объектов из совокупности, состоящей из n объектов, при которой выбираемый элемент каждый раз после фиксирования возвращается обратно, а порядок появления объектов несущественен.

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k = \frac{n(n+1)(n+2)...(n+k-1)}{k!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Пример. Игральную кость подбрасывают 4 раза и записывают результат подбрасывания, не принимая во внимание порядок, в котором выпадают цифры. Например, если выпали по порядку 6, 6, 4, 1, а в другой раз 6, 1, 6, 4, то считают, что эти результаты одинаковы. Найти число различных сочетаний с повторением из 6 чисел по 4.

$\overline{C_6^4} = C_{6+4-1}^4 = C_9^4 = \dfrac{9!}{5!\cdot 4!}$ (без повторений: $C_6^4 = \dfrac{6!}{2!\cdot 4!}$).

Случайные события. В теории вероятностей испытанием или опытом называют совокупность некоторого комплекса условий. Каждому проведенному испытания соответствует определённый исход или событие. События обозначаются заглавными латинскими буквами А, В, С …

A_1 - появление цифры при бросании монеты;

A_2 - выпадение четного числа очков при игре в кости;

A_3 - выход из строя компьютера после пяти часов работы;

A_4 - замерзание воды при сильном морозе;

A_5 – в перечне месяцев года после января следует апрель.

Все эти события отличаются в первую очередь тем, что возможность их появления различна. Одно событие (A_4) происходит всегда, другое (A_5) никогда не наступает, остальные могут произойти или не произойти в результате проведения одного опыта.

Если в результате опыта событие А всегда происходит, то оно называется достоверным. Обозначают достоверное событие Ω. Если же это событие при заданных условиях никогда не наступает, то его называют невозможным. Невозможные события обозначаются знаком $\varnothing$. Так, если сегодня пятница, то завтра по календарю непременно наступит суббота. Во всех других случаях наступление субботы невозможно. Другой пример. При бросании одной игральной кости невозможно выпадение целого числа большего шести. В то же время гарантировано выпадение натурального числа меньшего семи.

Если в результате опыта данное событие может наступить или не наступить, то оно называется случайным. Условия проведения такого опыта часто называют случайным опытом (экспериментом). Например, после бросания игральной кости число три может выпасть, но оно может и не выпасть. Через пять часов после включения компьютер может быть исправным, но может и выйти из строя. Стреляя в мишень можно попасть с первого выстрела, можно с третьего, но можно не попасть и никогда.

Замечание. При изменении комплекса условий невозможное событие может стать случайным и наоборот. Например, температура в -20^0 невозможна летом в северном полушарии и может быть или не быть зимой.

Пусть проводится случайный опыт, в результате которого обязательно наступает одно и только одно из возможных событий w_i, неразложимых на более простые. Такие события называются элементарными. Множество Ф всех элементарных событий w_i образует пространство элементарных событий. Например, при бросании игральной кости множество элементарных событий – исходов опыта образует пространство из шести элементарных исходов w_i : выпало одно очко, выпало два очка и т.д.

$\Phi = \{w_1 = 1, w_2 = 2, w_3 = 3, w_4 = 4, w_5 = 5, w_6 = 6\}$.

Наряду с элементарными рассматриваются так называемые составные (сложные) или разложимые события. Событие В называется составным, если можно найти, по меньшей мере, два таких элементарных события w_1 и w_2, что из существования каждого из них в отдельности следует существование события В. Например, при бросании игральной кости составное событие А = {число очков четное} можно записать так: А = {2,4,6}, подразумевая при этом, если выпадут числа 2 или 4 или 6, то наступит событие А.

Суммой (объединением) событий A_1, A_2, ..., A_n называется событие А, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий. Обозначается одним из следующих способов

$$A = A_1 + A_2 + .. + A_n = A_1 \cup A_2 \cup .. \cup A_n \qquad (18.8)$$

Пример 1. В урне 6 одинаковых шаров, пронумерованных от 1 до 6. Событие A - наугад выбрать шар под нечетным номером, т.е. $A = A_1 + A_3 + A_5$, состоит в том, что будет выбран шар с номером 1 или 3 или 5.

Произведением (пересечением) событий A_1, A_2, ..., A_n называется событие В, состоящее в обязательном наступлении всех этих событий. Обозначается пересечение событий так

$$B = A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \qquad (18.9)$$

Пример 2. В урне 12 шаров, среди которых одна половина белых с номерами от 1 до 6, а другая черных с такими же номерами. Пусть А - "вынуть белый шар", В - " вынуть шар с нечетным номером. Тогда событие

$C = A \cdot B$

означает " выбрать белый шар с нечетным номером".

Как следует из определения, пересечение событий не изменится, если поменять местами сомножители:

$C = B \cdot A.$

Разностью событий A и B (обозначается A - B) называется событие, заключающееся в наступлении события A и одновременном не наступлении события B. Для предыдущего примера событие

D = A – B

означает "выбрать белый шар с четным номером".

Противоположное к A событие (дополнение события A до достоверного) - это событие $\overline{A}$, состоящее в не наступлении события A. Так, если A -" вынуть белый шар", то $\overline{A}$ - "вынуть не белый шар".

События A и B называются попарно несовместными, если в результате одного опыта они не могут произойти одновременно. Это значит, что у них нет ни одного общего элементарного события. Формально несовместность событий A и B определяется следующим образом

$A \cdot B = \varnothing$.

Например, при однократном бросании игральной кости выпадение четного и нечетного числа - несовместные события. Несовместными являются также промах и попадание при стрельбе по мишени.

Если рассматривать более двух событий, то следует разделить несовместимость попарно и несовместимость в совокупности.

Пример. Куплены два лотерейных билета. Обязательно произойдет одно из событий:

А - На первый билет выпадет выигрыш, на второй – нет;

Б - На первый билет выигрыш не выпадет, на второй – выпадет;

В - На оба билета выпадут выигрыши;

Г - Оба билета проиграют.

Здесь события А, Б, В, Г – попарно несовместные.

Совокупность событий A_1, A_2, ..., A_n называется полной группой несовместных событий, если в результате опыта одно из них обязательно осуществится, т.е.

$A_1 + A_2 + ... + A_n = \Omega$

и любая пара событий A_i и A_j несовместна

$A_i \cdot A_j = \varnothing$.

Примером полной группы несовместных событий является пара двух противоположных событий $\{A, \overline{A}\}$. Например, выпадение герба и цифры в результате подбрасывания монеты, работоспособность компьютера и его неисправность в данный момент времени, попадание и не попадание в мишень при одном выстреле и т.д.

События A и B называются независимыми, если появление одного из них не изменяет возможность появления другого. Например, одновременно бросаются две игральные кости. Появление на одной из них трех очков никак не зависит от того, какое количество очков появилось на верхней грани другой кости.

Если появление одного события влияет на появление другого, то такие события называются зависимыми. Например, в урне 4 пронумерованных и одинаковых на ощупь шаров с номерами 1, 2, 3, 4. Вынимается один шар, а затем второй. Событие A - первый вынутый шар имеет четный номер. Событие B - вынутый второй шар имеет четный номер. Очевидно, что эти события зависимы, т.к. от того, какой шар был вынут в первом опыте, зависит шансы наступления второго события. Действительно. Если первым вынули четный шар, то шансы вынуть четный шар и во втором опыте (событие $A \cdot B$) будут меньше, чем, если бы первым был вынут нечетный шар (событие $\overline{A} \cdot B$).

События называют равновозможными, если нет оснований считать, что одно из них встречается чаще, чем другое. Например, при бросании одного кубика нет оснований считать, что число 6 будет выпадать чаще, чем число 2. Все грани кубика равноправны.

Определения вероятности случайного события.

Классическое определение. Рассмотрим полную группу из n попарно несовместных равновозможных событий. Примерами таких групп являются: число очков при бросании игральных костей, число попаданий в мишень при выстрелах, проводимых в одинаковых условиях, появление шара с заданным номером при наличии в урне нескольких неразличимых на ощупь шаров.

Пусть среди всех возможных n событий нас интересует только вполне определенное подмножество из m элементов. Входящие в m подмножество события благоприятны к появлению события A (сложное событие A наступает в результате появления одного из этих m событий). Например, в урне два белых, три черных и пять красных одинаковых на ощупь шаров. Пусть событием A будет выбор белого шара. Тогда благоприятных случаев два. Появление же черного или красного шара - случай не благоприятный. Очевидно, что их восемь.

Вероятность события A вычисляется как отношение числа благоприятных случаев к общему возможному числу случаев:

$$P(A)=\frac{m}{n}. \qquad (18.10)$$

Эта формула называется классической формулой для вычисления вероятностей. Схема применения классической формулы следующая:

1. Удостоверяются в том, что возможные исходы образуют полную группу несовместных равновозможных событий;

2. Выбирается интересующее нас событие A;

3. Вычисляется число всех возможных исходов (n) и число благоприятных для A исходов (m);

4. Вычисляется искомая вероятность $P(A)$.

Пример 1. Какова вероятность вытащить из колоды карт карту пиковой масти.

Решение. Колода содержит четыре масти, количество карт каждой масти одинаково. Следовательно, нас интересует только одна масть из четырех $m=1,\ n=4$

$$p=\frac{m}{n}=\frac{1}{4}.$$

Пример 2. Замок имеет четырехзначный цифровой шифр. Наугад выбираются четыре цифры. Какова вероятность открыть при этом замок, если известно, что в коде все цифры различные?

Решение. Поскольку в шифре замка важен не только набор цифр, но и их порядок, то число благоприятных событий равно 1 (единственный номер). Общее же число возможных упорядоченных комбинаций из четырех различных цифр определяется по формуле $n = \mathrm{A}_{10}^{4}$. Таким образом, искомая вероятность

$$P(A)=\frac{1}{A_{10}^{4}}=\frac{1}{504}.$$

Априорно-частотное определение.

Статистической частотой появления события А в n опытах называется отношение числа появлений этого события (m) к числу проведенных опытов n

$$p^*(A)=\frac{m}{n}. \qquad (18.11)$$

При увеличении числа опытов, проведенных в одинаковых условиях, частота появления события А все меньше отличается от вероятности события А

$$p(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n} \qquad (18.13)$$

Введенная таким образом вероятность события носит название статистической или априорно-частотной. Она фиксирует связь между частотой события, как непосредственно измеряемой величиной, и вероятностью, как формальную характеристику случайного события (теорема Я. Бернулли).

Геометрические вероятности. Пусть пространство элементарных событий является несчетным (т.е. количество элементов не является счетным множеством), но выполняются следующие условия:

1. Любые два элементарных события несовместны;
2. Все события являются равновозможными.

В таких опытах вероятности некоторых событий можно вычислить геометрически как отношение длин отрезков, площадей фигур, объемов соответствующих областей.

Пример. Поезда в метро идут с интервалом в три минуты. Чему равна вероятность того, что пассажир будет ждать поезда более двух минут?

Решение. Считаем, что все моменты появления пассажира в интервале между поездами равновероятны. Если время интервала принять за три единицы длины $l_0 = 3$, то время ожидания более двух минут равно одной единице длины l(А), т.к. благоприятствующее событие (А - прождать более двух минут, т.е. от двух до трех минут) занимает одну минуту в трехминутном интервале движения поездов (рис. 1).

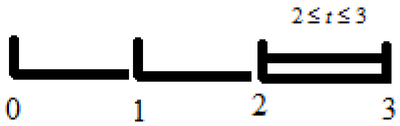

Рис. 1.

Следовательно, искомая вероятность равна отношению двух длин временных интервалов

$$P(A)=\frac{l(A)}{l_0}=\frac{1}{3}.$$

Основные теоремы теории вероятностей

Изложенные выше прямые методы вычисления вероятностей не всегда эффективны, а иногда и просто невозможны. На практике искомую вероятность часто находят косвенными методами, позволяющими по известным вероятностям одних событий находить вероятности других событий, с ними связанных. В основе этих косвенных методов лежат основные теоремы теории вероятностей.

Первая теорема умножения вероятностей. Пусть рассматриваются два события А и В, для которых известны вероятности их появления $P(A)$ и $P(B)$. Вероятность произведения двух событий $P(A{\cdot}B)$ равна произведению вероятности появления одного из них на условную вероятность другого события $P(B|A) = P_A(B)$, т.е. вероятность события B, вычисленную при условии, что событие A произошло.

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P_A(B) \tag{18.12}$$

Для трех зависимых событий A, B, C формула имеет вид:

$$P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{A\cdot B}(C)$$

Теорема верна и для произведения n событий

$$P(A_1{\cdot}A_2{\cdot}\ldots{\cdot}A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1{\cdot}A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n|A_1{\cdot}A_2{\cdot}\ldots{\cdot}A_{n-1})$$

Пример 1. Механизм собирается из трех одинаковых деталей и считается неработоспособным, если все три детали вышли из строя. В сборочном цехе осталось 15 деталей, из которых 5 не стандартных (бракованных). Какова вероятность того, что собранный из взятых наугад оставшихся деталей механизм будет неработоспособным.

Решение. Обозначим искомое событие через А, а выбор первой нестандартной детали через A_1, второй через A_2 и третьей через A_3. Событие А произойдет, если произойдет и событие A_1 и событие A_2 и событие A_3. Однако события A_1, A_2, A_3 зависимы и, если вероятность выбрать первую нестандартную деталь равна 5/15, то вероятность выбрать и вторую нестандартную деталь равна 4/14 и третью нестандартную деталь равна 3/13. Следовательно, используя формулу (1.2), имеем

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3\mid A_1\cdot A_2)=\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13}\approx 0.022.$$

Пример 2. Студент выучил 10 вопросов к зачету из 15. Какова вероятность того, что он ответит на два вопроса подряд.

Решение. Вероятность того, что студент ответит на первый вопрос, равна $p(A_1)=\frac{m}{n}=\frac{10}{5}$. А при ответе на второй вопрос, если первым попался знакомый вопрос, у него осталось 9 известных вопросов из 14 $P_A(B)=\frac{9}{14}$. Окончательно, вероятность ответить на два вопроса подряд равна

$$P(AB)=P(A)P_A(B)=\frac{10}{15}\cdot\frac{9}{14}=\frac{3}{7}$$

Пример 3. Имеется колода из 36 карт. Найти вероятность того, что вытаскиваемые подряд карты будут пики.

Решение:

$$P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{A\cdot B}(C)=\frac{9}{36}\cdot\frac{8}{35}\cdot\frac{7}{34}=\frac{1}{85}\approx 0{,}012.$$

В тех же условиях найти вероятность того, произойдут события: A – появятся пики, B – не пики, C – пики

$$P(A\cdot B\cdot C)=P(A)P_A(\overline{B})P_{A\overline{B}}(C)=\frac{9}{36}\cdot\frac{27}{35}\cdot\frac{8}{34}=\frac{54}{595}\approx 0{,}091$$

Вторая теорема умножения вероятностей. Для независимых событий вероятность появления события B не меняется при появлении события A, т.е. $P(B)=P_A(B)$. Тогда формула (18.12) имеет упрощенный вид

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B), \qquad (18.13)$$

т.е. вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. Это выражение носит название критерия независимости случайных событий. Свойство независимости – взаимное, т.е. если событие A не зависит от события B, то и наоборот событие B не зависит от события A.

Следствие *1*. Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, то вероятность произведения этих событий равна произведению их вероятностей.

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n)$$

Следствие 2. Следует различать понятия попарно независимые события и события независимые в совокупности, т.к. события попарно независимые могут быть зависимыми в совокупности.

Поясним этот факт на примере. Имеются четыре бракованные детали каждая своим браком: 1-я деталь имеет царапину, 2-я имеет вмятину, 3-я плохо окрашена, 4-я имеет все три дефекта. Введем события A, B, C: событие A – деталь имеет царапину, B – деталь имеет вмятину, C - деталь имеет дефект окраски. Выясним, являются ли события A, B, C попарно независимыми и являются ли они независимыми в совокупности. Найдем соответствующие вероятности.

$$P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};\quad P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2};\quad P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

$$P(A\cdot B)=\frac{1}{4};\quad P(A\cdot C)=\frac{1}{4};\quad P(B\cdot C)=\frac{1}{4}.$$

Проверка попарной независимости. Для A и B : $P(A\cdot B)=\frac{1}{4}$, $P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, следовательно $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$. A и B независимы. Аналогично проводится проверка двух оставшихся пар. Проверим независимость в совокупности. $P(A\cdot B\cdot C)=\frac{1}{4}$, $P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\neq\frac{1}{4}$. События A, B, C зависимы в совокупности.

Формула обобщается и на произведение n независимых событий

$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot...\cdot P(A_n)$.

Пример. Первый охотник поражает цель с вероятностью 0,9, второй – с вероятностью 0,7. Найти вероятность того, что оба охотника попадут в цель.

Решения. Так как попадание в цель одного охотника не зависит от успеха второго, то

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0{,}9\cdot 0{,}7=0{,}63$$

Первая теорема сложения вероятностей. Вероятность суммы двух не совместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \qquad (18.14)$$

Следствие. Сумма вероятностей двух противоположных событий равна 1. Действительно, противоположные события несовместны и образуют полную группу $A+\overline{A}=\Omega$ (событие достоверное), отсюда $P(A+\overline{A})=P(\Omega)=1$ или $P(A)+P(\overline{A})=1$. Следовательно, $P(\overline{A})=1-P(A)$. Вероятность противоположного события часто обозначают $P(\overline{A})=q$.

Вторая теорема сложения вероятностей. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность произведения этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A\cdot B) \qquad (18.15)$$

Пример. Производится два независимых выстрела в одну и те же мишень. Вероятность попадания при первом выстреле 0.6, а во втором - 0.8. Найти вероятность попадания в мишень при двух выстрелах.

Решение. Обозначим попадание при первом выстреле как событие A_1, при втором как событие A_2. Попадание в мишень предполагает хотя бы одно попадание: или только при первом выстреле, или только при втором, или и при первом и при втором. Следовательно, в задаче требуется определить вероятность суммы двух совместных событий A_1 и A_2.

$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1\cdot A_2)$

Поскольку события независимы, то $P(A_1A_2) = P(A_1)\cdot P(A_2)$. Поэтому

$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)\cdot P(A_2) = 0.6 + 0.8 - 0.6\cdot 0.8 = 0.92$.

Из формулы (18.15) можно получить формулу для вероятности суммы трех событий

$P(A+B+C) = P(A) + P(B) - P(A\cdot B) - P(A\cdot C) - P(B\cdot C) + P(A\cdot B\cdot C)$

При увеличении числа слагаемых формула вероятности суммы все более усложняется. На практике при решении некоторых задач целесообразен переход к противоположному событию. При этом используют известное правило: вероятность суммы противоположных событий всегда равна единице, т.к. $A+\overline{A}$ в сумме дают достоверное событие

$$P(A+\overline{A})=1\Rightarrow P(A)+P(\overline{A})=1 \text{ или } P(A)=1-P(\overline{A})$$

Вероятность хотя бы одного события. Суммой событий A_1, A_2, ..., A_n называется событие A, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий. Противоположным к «хотя бы одно событие» является «ни одного события A_i». Вероятность не наступления

ни одного события A_i равна вероятности произведения событий $\overline{A_i}$ $P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} ......\overline{A_n})$.
Для независимых в совокупности событий $P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} ......\overline{A_n}) = \mathrm{P}(\overline{A_1}) \cdot ..... \cdot P(\overline{A_n})$. Поэтому

В общем же случае

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} ......\overline{A_n}) \qquad (18.16)$$

Пример. Ремонтное ателье обслуживает пять клиентов. Вероятность вызова на обслуживание от каждого клиента равна 0.2. Какова вероятность того, что в данный момент ателье занято обслуживанием клиентов.

Решение. Очевидно, что событие А "быть занятым обслуживанием клиентов" есть сумма событий $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$, где A_i - "быть занятым обслуживанием i-го клиента". Противоположное событие "не быть занятым обслуживанием клиентов" определяется так: $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4} \cdot \overline{A_5}$. Следовательно, можно применить формулу (18.16).

$$P\left(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5\right) = 1 - P\left(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \cdot \overline{A_4} \cdot \overline{A_5}\right) = 1 - \left(1 - 0.2\right)^5 = 0.672.$$

Повторные независимые испытания. Формула Бернулли.

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, которые можно представить в виде многократно повторяющихся испытаний при данном комплексе условий, в которых представляет интерес вероятность числа m наступлений некоторого события A в n испытаниях. Например, необходимо вычислить вероятность определенного числа попаданий при нескольких выстрелах в мишень, вероятность некоторого числа бракованных изделий в данной партии изделий и т.п.

Если вероятность наступления события A в каждом испытании не изменяется в зависимости от исходов других, то такие испытания называются независимыми относительно события А. Если испытания проводятся в одном и том же комплексе условий, то вероятность наступления события A в каждом испытании одна и та же. Описанная последовательность независимых испытаний получила название схемы Бернулли.

Теорема. Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A одна и та же и равна p, $P(A) = p$, а вероятность не появления события А $P(\overline{A}) = q$. Тогда вероятность того, что событие A появится в этих событиях m раз (безразлично в какой последовательности), выражается формулой Бернулли:

$$P_n\left(m\right) = C_n^m p^m q^{n-m} \ ,$$

Доказательство. Определим вероятность появления события A m раз при n испытаниях. При этом заметим, что наступление или ненаступление события A могут чередоваться в любом порядке. Условимся записывать возможные результаты испытаний в виде комбинаций букв A и $\overline{A}$ (A и $\overline{A}$ - соответственно появление и непоявление события A в i -том испытании), и пусть B_m - событие, состоящее в том, что в n независимых испытаниях событие A появилось m раз. Например, запись $A\overline{A}\overline{A}A$ означает, что в четырех испытаниях событие осуществилось в 1-м и в 4-м случаях и не осуществилось во 2 и 3 случаях.

Всякую комбинацию, в которую A входит m раз и не входит n-m раз, назовем благоприятной. Количество благоприятных комбинаций N равно количеству $к$ способов, которыми можно выбрать m чисел из данных n, т.е. оно равно числу сочетаний из n элементов по m, т.е. $N = C_n^m$.

Подсчитаем вероятности благоприятных комбинаций. Рассмотрим сначала случай, когда событие A происходит в первых m испытаниях и не происходит в остальных n-m испытаниях: $B_1 = \underbrace{AA....A}_{m\ раз}\underbrace{\overline{A}\overline{A}...\overline{A}}_{n-m\ раз}$.

Вероятность этой комбинации в силу независимости испытаний составляет:

$$P(B_1)=\underbrace{P(A)P(A)...P(A)}_{m}\underbrace{P(\overline{A})P(\overline{A})..P(\overline{A})}_{m-n}=p^m q^{m-n} \quad .$$

В любой другой благоприятной комбинации B_i событие A встречается также m раз, а событие $\overline{A}$ происходит n-m раз, то вероятность каждой такой комбинации равна $p^m q^{m-n}$.

Все благоприятные комбинации являются несовместными, поэтому на основании теоремы сложения вероятностей имеем:

$$P_n(m)=P(B_1+B_2+...+B_k)=P(B_1)+P(B_2)+...+P(B_k)=Np^m q^{m-n}=C_n^m p^m q^{n-m} .$$

Мы получили формулу Бернулли:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m} \qquad (18.17)$$

Пример 1. В урне 20 белых и 10 черных шаров. Вынули подряд 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают обратно перед извлечением следующего. Какова вероятность того, что из четырех вынутых шаров 2 белых?

Решение. Вероятность вынуть белый шар p = P(Б)= $\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$. Вероятность появления белого шара можно считать постоянной во всех испытаниях; q = Р(Ч) =1 – p = $\frac{1}{3}$. Искомая вероятность может быть найдена по формуле Бернулли: $P_4(2)=C_4^2\cdot p^2\cdot q^2=\frac{8}{27}$.

Пример 2. Вероятность прибытия англоязычной группы туристическое агентство оценивает величиной 0.6. Прибывает шесть групп. Найти вероятность того, что: а) из прибывших ровно четыре англоговорящие группы; б) прибудет не более двух таких групп.

Решение. Ответ на вопрос а) получаем прямой подстановкой данных в формулу (18.17)

$$P_6(4)=C_6^4 p^4(1-p)^2=15(0.6)^4(0.4)^2=0.311.$$

Чтобы получить ответ на вопрос б), необходимо вычислить сумму вероятностей прибытия двух, одной или ни одной групп:

$$P_6(0)+P_6(1)+P_6(2)=C_6^0(1-p)^6+C_6^1 p(1-p)^5+C_6^2 p^2(1-p)^4=0.4^6+6\cdot 0.6\cdot(0.4)^5+$$
$$+15\cdot(0.6)^2\cdot(0.4)^4=0,201.$$

Наивероятнейшее число появления события A. Наивероятнейшим числом называется то значение m при котором $P_n(m)$ максимально.

$$\begin{cases} P_n(m)\ge P_n(m-1) \\ P_n(m)\ge P_n(m+1) \end{cases}$$

Можно показать, что число m удовлетворяет следующим неравенствам

$$np - q \le m \le np + p \qquad (18.18)$$

Пример. Для предыдущей задачи найти наивероятнейшее число англоязычных групп.

$$n=6,\ p=0,6,\ q=1-p=0,4\Rightarrow np-q=6\cdot 0,6-0,4=3,2;\ np+p=6\cdot 0,6+0,6=4,2$$
$$3,2\le m\le 4,2\Rightarrow m=4$$

Локальная теорема Лапласа. Если вероятность появления события A в n опытах одна и та же и равна p, $P(A)=p$, $p>0,1$, то вероятность того, что событие A появится в этих событиях m раз приближенно равна

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \qquad (18.19)$$

где $x = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$.

Точность формулы увеличивается с ростом *n*. Функция $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, табулирована, таблицы приведены в конце лекции. Функция $\varphi(x)$ четная, $\varphi(-x) = \varphi(x)$, для отрицательных значений *x* используют те же таблицы.

Формула Пуассона. Если *n* велико, $n \gg 1$, а *p* мало, $p \le 0{,}1$, а произведение np сохраняет постоянное значение, то вероятность того, что событие *A* появится в этих событиях *m* раз приближенно равна

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \qquad (18.20)$$

где $\lambda = np$.

Интегральная теорема Лапласа. Если нас интересует вероятность того, что в *n* испытаниях событие *A* появится не менее m_1 и не более m_2 раз может быть приближенно вычислена по интегральной формуле Лапласа

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = C_n^{m_1} p^{m_1} q^{n-m_1} + \ldots.. + C_n^{m_2} p^{m_2} q^{n-m_2} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (18.21)$$

где $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Для вычисления интеграла удобно использовать интегральную функцию Лапласа.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \qquad (18.22)$$

Функция $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ табулирована. Таблицы приведены в конце лекции. $\Phi(x)$ нечетная функция, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$

Следствие. Вероятность отклонения статистической частоты (статистической вероятности) от постоянной вероятности *p*. Из формулы (18.21) можно найти вероятность того, что статистическая частота отклоняется от заданной вероятности не более, чем на ε

$$P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \right) \qquad (18.23)$$

Формула полной вероятности. Рассмотрим следующую ситуацию. Приобретается компьютер, который может быть изготовлен с полным комплексом тестирования или по сокращенному варианту. Известно, какая часть компьютеров изготавливается по сокращенному варианту, а также вероятность безотказной работы компьютера в течение гарантийного срока при различных вариантах изготовления. Какова вероятность того, что приобретенный компьютер безотказно проработает гарантийный срок?

Сложность решения данного вопроса обусловлена тем, что неизвестно, какой вариант изготовления реализован при изготовлении именно приобретенного компьютера. Для решения подобного класса задач наиболее удобно применение формулы полной вероятности, являющейся обобщением теорем умножения и сложения вероятностей.

Пусть некоторое событие *A* может произойти с какой-то вероятностью только как следствие каждого из событий H_1, H_2, ..., H_n, образующих полную группу несовместных событий. Такие события H_i называются гипотезами. Заданы вероятности гипотез $P(H_i)$ и условные вероятности наступления события A с каждой из гипотез $P(A|H_i)$. Вероятность наступления события А дается формулой полной вероятности

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A|H_i). \qquad (18.24)$$

Задача. Имеется три одинаковых урны. В первой два белых и один черный шар, во второй три белых и один черный шар, в третьей урне два белых и два черных шара. Из выбранной наугад урны выбирается один шар. Какова вероятность того, что он окажется белым?

Решение. Гипотезой H_i будем считать выбор *i*-ой урны. Все урны считаются одинаковыми, следовательно, вероятность выбрать i-ую урну есть $P(H_i) = 1/3$, i =1,2,3. Зная состав шаров в каждой из урн, легко определить вероятности вынуть белый шар из каждой урны: $P(A|H_1) = 2/3$, $P(A|H_2) = 3/4$, $P(A|H_3) =1/2$. Подставляя найденные значения в (1.8), имеем:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{23}{36}.$$

Формула апостериорной вероятности (формула Байеса). Рассмотрим ситуацию в некотором смысле противоположную предыдущей. Пусть событие А уже произошло, Требуется определить вероятность того, что событие произошло именно совместно с гипотезой H_i. Ответ на подобный вопрос дает формула апостериорной вероятности или формула Байеса

$$P(H_i|A)=\frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}=\frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)} \qquad (18.25)$$

Задача. Пусть сохраняются условия предыдущей задачи, но из урны уже вынут белый шар. Требуется определить вероятность, что шар вынут из первой урны.

Решение. Поскольку все вероятности необходимые для применения формулы (1.9) найдены, то имеем

$$P(H_1|A)=\frac{1/3\cdot 2/3}{1/3\cdot(2/3+3/4+1/2)}=\frac{8}{23}.$$

Схема опытов Бернулли. Если проводится *n* одинаковых и независимых опытов, в каждом из которых событие А может произойти с вероятностью р, то говорят, что реализуется схема опытов Бернулли.

Пусть событие В заключается в том, что событие А в *n* опытах происходит подряд *m* раз, а затем (*m*-*n*) раз происходит событие $\overline{A}$, т.е. $B=A\cdot A\cdot A\cdot\dots\cdot A\cdot\overline{A}\cdot\dots\cdot\overline{A}$.

Вероятность такого события В равна $P(B) = p^m (1-p)^{n-m}$.

Поскольку не требуется учитывать порядок появления событий, то необходимо учесть все события типа В. Событий же подобных В и отличающихся лишь порядком наступления событий A и $\overline{A}$ равно числу сочетаний из *n* по *m* C_n^m. Следовательно, искомая формула, носящая имя Бернулли, имеет вид

$$P_n(m)=C_n^m\cdot p^m\cdot(1-p)^{n-m}. \qquad (18.19)$$

Примеры.

Пример 1. В ящике 5 белых и 4 черных шара. Наудачу вынимают три. Какова вероятность, что среди них два белых и один черный шар?

Решение. Число всех возможных исходов - это число сочетаний из 9 по 3. Поэтому

$$n = C_9^3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = 84.$$

Число вариантов выбора 2 белых из 4 белых - это число сочетаний из 4 по 2, то есть

$$C_4^2 = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6,$$

и так как каждая пара может выпасть с любым из 4 черных шаров, то число благоприятных исходов равно произведению

m = 6·4 = 24.

Тогда вероятность события “из ящика взяли 2 белых и 1 черный шар”

$$P = \frac{m}{n} = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}.$$

Пример 2. На 10 карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 0. Наудачу выбирают три карточки и раскладывают их в порядке появления. Какова вероятность, что получится число 120?

Решение. Поскольку в этом примере важен порядок цифр, то число всех возможных исходов

$$n = A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720.$$

Благоприятный исход только один, поэтому искомая вероятность

$$P = \frac{1}{720}.$$

Пример 3. Два охотника стреляют по одной мишени и имеют вероятности попадания 0,7 и 0,8 соответственно. Оба сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что

а) в мишени ровно две пробоины,

б) в мишени хотя бы одна пробоина,

в) в мишени ровно одна пробоина?

Решение. Введем обозначения: событие A - попал первый охотник, $\overline{A}$ - первый охотник промахнулся, B - попал второй охотник, $\overline{B}$ - второй охотник промахнулся, C - в мишени ровно две пробоины, D - в мишени хотя бы одна пробоина, E - в мишени ровно одна пробоина.

Событие C состоит в том, что произошло и A, и B одновременно, то есть произошло произведение событий AB , т.е. C = AB. Событие D состоит в том, что произошло хотя бы одно из событий A или B, то есть сумма событий A + B , т.е. D = A + B, и, наконец, событие E состоит в том, что A произошло а B нет или B произошло а A нет, E = $A\overline{B} + \overline{A}B$. Учитывая, что A и B независимые события (вероятность попадания одного из охотников не зависит от того попал другой или нет)

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}3$ и $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0{,}2$.

Следовательно

$P(C) = 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}56$,

$P(D) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \times 0{,}8 = 0{,}94$,

$P(E) = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) = 0{,}7 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}38$.

Пример 4. На фабрике, изготовляющей болты, первая машина производит 25 %, а вторая – 35 %, третья – 40 % всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2 %.

а) Какова вероятность того, что случайно выбранный болт дефектный?

в) Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был произведен первой машиной?

Решение. а) Обозначим за H_1 событие – болт сделан на первой машине, за H_2 событие – болт сделан на второй машине, за H_3 событие – болт сделан на третьей машине. Тогда: $P(H_1) = 0,25$ – вероятность того, что болт сделан на первой машине. Соответственно $P(H_2) = 0,35$ и $P(H_3) = 0,40$.

Пусть событие А – болт бракован, тогда $P(A|H_1) = 0,05$ – вероятность, что брак выпущен первой машиной, соответственно $P(A|H_2) = 0,04$, а $P(A|H_3) = 0,02$.

$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) + P(H_3)\cdot P(A|H_3) = 0,25 \cdot 0,05 + 0,35 \cdot 0,04 + 0,40 \cdot 0,02 + 0,0125 + 0,014 + 0,008 = 0,0345$.

Б) $P(H_1|A)$ – вероятность того, что дефектный болт произведен первой машиной

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0,0125}{0,0345} = 0,3624.$$

Пример 5. Что вероятнее выиграть у равносильного противника: а) три партии из четырех или пять из восьми; б) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми, если ничьих не бывает?

Решение. Для равносильных противников вероятность выигрыша (проигрыша) одинакова, то есть $p = q = \frac{1}{2}$.

а) Вероятность выигрыша m партий из n $P_n(m)$ задается формулой

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

В первом случае $n=4$, $m=3$. Следовательно, вероятность выиграть три партии из четырех

$$P_4(3) = C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{4!}{3!1!}\cdot\frac{1}{16} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

Когда $n = 8$, а $m = 5$, то

$$P_{5,8} = P_8(5) = C_8^5 p^5 q^{8-5} = \frac{8!}{5!3!}\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{32}.$$

Следовательно, $P_4(3) > P_8(5)$.

Б) Вероятность выиграть не менее трех партий есть сумма вероятностей выиграть три или четыре партии из четырех, так как эти события несовместны, то

$$P_1 = P_4(3) + P_4(4) = \frac{1}{4} + C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{4} + \frac{4!}{4!0!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$$

(Напомним, что 0!=1).

Аналогично, вероятность выиграть не менее пяти партий из восьми

$$P_2 = P_8(5) + P_8(6) + P_8(7) + P_8(8) = \frac{7}{32} + C_8^6\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_8^7\left(\frac{1}{2}\right)^7\cdot\frac{1}{2} + C_8^8\left(\frac{1}{2}\right)^8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0 =$$

$$= \frac{7}{32} + \left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{8\cdot7}{2} + 8 + 1\right) = \frac{93}{256}.$$

$P_2 > P_1$.

Следовательно, выиграть не менее пяти партий из восьми вероятнее.

Приложение №1. Таблица значений функции Гаусса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	сотые									
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003

3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001