

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ДИЗАЙНА»**

Кафедра математики

МАТЕМАТИКА

Методические указания и контрольные задания № 3,4
для студентов заочной формы обучения
всех направлений подготовки

Регионального института непрерывного профессионального образования

Составители:
Д.В. Вольнова
А.В. Матвеева

Санкт-Петербург
2022

РЕКОМЕНДОВАНО
на заседании кафедры
31.01.2022 г., протокол № 5
Рецензент В. В. Максимов

Учебное электронное издание сетевого распространения
Издано в авторской редакции

Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением для воспроизведения файлов формата
PDF

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=2022, по паролю. – Загл. с экрана.
Дата подписания к использованию __. __. 2022 г. Рег. №

ФГБОУВО «СПбГУПТД»

Юридический и почтовый адрес: 191186, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 18.

<http://sutd.ru>

В контрольной работе № 3 каждый студент должен решить и представить на рецензию два примера (1 и 2) из 1 задания, один пример из 2 задания, четыре примера (а, б, в, г) из 3 задания, один пример из 4 задания. В контрольной работе № 4 каждый студент должен решить и представить на рецензию по одному примеру из 1, 2 и 3 заданий.

Контрольная должна быть выполнена в письменном виде в отдельной тетради с соблюдением следующих правил:

1. Рукописную работу нужно сфотографировать или отсканировать с сохранением файлов в форматах PDF или JPEG;
2. Если работа сфотографирована, то вставить все файлы фотографий в документ Microsoft Office Word, либо в архив формата RAR;
3. Все задания выполняются в порядке возрастания их номеров; каждый лист тетради с выполненными заданиями должен быть пронумерован в порядке возрастания номеров.

Контрольная работа должна быть представлена на проверку на сайт информационно-образовательной среды заочной формы обучения СПбГУПТД <http://edu.sutd.ru/moodle/> не позднее срока, указанного на данном сайте. Контрольная работа не проверяется в день зачёта/экзамена.

Полностью выполненная контрольная работа без ошибок является допуском студента к зачёту/экзамену.

Если в работе есть ошибки, то их нужно исправить в этой же тетради и прислать на повторную проверку.

Прежде чем приступать к выполнению контрольных работ, студенту необходимо изучить соответствующий теоретический материал по указанным выше источникам литературы. По каждой теме дается список вопросов, на которые необходимо ответить при подготовке к зачёту/экзамену.

Если в процессе изучения теории или при решении задач возникают вопросы, то можно обратиться к преподавателям кафедры математики для получения консультации (консультации проходят по расписанию).

Во время экзаменационной сессии для студентов-заочников организуются лекции и практические занятия, которые носят обзорный характер.

При выполнении контрольной работы обратите внимание на оформление:

НА ТИТУЛЬНОМ ЛИСТЕ ДОЛЖНЫ БЫТЬ УКАЗАНЫ:

Фамилия, имя, отчество.

Номер студенческого билета (или зачетной книжки).

Название дисциплины и номер контрольной работы по этой дисциплине.

Номер варианта.

Номер варианта, который должен выполнять студент, соответствует последней цифре номера студенческого билета (или зачетной книжки).

В каждом задании 20 вариантов примеров. Если год Вашего поступления в Университет – чётный, то Вы выбираете пример из первых десяти вариантов, а если – нечётный, то выбираете свой вариант из номеров с одиннадцатого по двадцатый.

Например, год поступления 2018, вариант 3, следовательно, должны быть выбраны примеры 1.03, 2.03 и т. д.

Например, год поступления 2019, вариант 3, следовательно, должны быть выбраны примеры 1.13, 2.13 и т. д.

Контрольная работа 3

Основные темы и рекомендуемая литература для их изучения.

№	Тема	Литература
01	Функции двух переменных	[2, гл. 7, §30, 32, 37, 39]
02	Неопределённый интеграл	[1, гл. 10] [2, гл. 4]
03	Определённый интеграл	[1, гл. 11] [2, гл. 5]

Вопросы для самопроверки

1. Функции двух переменных

1. Дать определение функции двух переменных, определение области определения.
2. Какие приращения есть у функции двух переменных?
3. Дать определение частных производных и дифференциалов функции двух переменных.
4. Дать определение градиента. Геометрический смысл градиента.
5. Дать определение экстремуму функции двух переменных.
6. Сформулировать необходимые и достаточные условия экстремума.

2. Неопределённый интеграл

1. Дайте определение первообразной функции и перечислите её свойства.
2. Что называется неопределённым интегралом?
3. Напишите таблицу основных интегралов.
4. Сформулируйте простейшие свойства неопределённого интеграла.
5. Напишите формулу замены переменной в неопределённом интеграле.

Приведите примеры.

6. Напишите формулу интегрирования по частям для неопределённого интеграла. Укажите типы интегралов, вычисление которых целесообразно производить с помощью метода интегрирования по частям. Приведите примеры.

7. Изложите методы интегрирования простейших рациональных дробей I, II и III типов.

3. Определённый интеграл

1. Дайте определение определённого интеграла и укажите его геометрический смысл.

2. Пусть $\int_a^b f(x)dx = 0$, $f(x) \neq 0$. Как это истолковать геометрически?

3. Докажите основные свойства определённого интеграла: а) постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла; б) определённый интеграл от суммы нескольких функций равен сумме определённых интегралов от слагаемых; в) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, где $a < c < b$.

4. Напишите формулу замены переменной в определённом интеграле. Приведите пример.

5. Напишите формулу интегрирования по частям для определённого интеграла. Приведите пример.

Методические указания

1. Функции двух переменных

Пример. $z = \ln \frac{x}{y}$.

1) Найти область определения функции.

2) Найти градиент функции. Вычислить градиент в точке $A(1, 1)$.

3) Проверить, что $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot y = 0$.

4) Проверить, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot x^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot y^2 = -2$.

Решение.

1) Областью определения $D(f)$ функции двух переменных $z = f(x; y)$ называется соответствие f , которое каждой упорядоченной паре чисел $(x; y) \in D$ сопоставляет одно и только одно число $z \in \mathbb{R}$.

Для данной функции под знаком логарифма может стоять только положительное выражение, следовательно

$$\frac{x}{y} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}.$$

Сделаем чертеж (рис. 1)

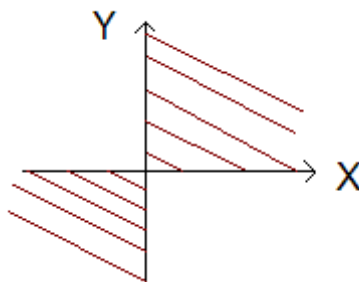


Рис. 1

Область определения функции $z = \ln \frac{x}{y}$ показана на рисунке штриховкой.

2) Градиентом функции z называется вектор, координатами которого служат частные производные функции в данной точке:

$$\text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j} = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y} \right\}.$$

При вычислении частной производной по x рассматриваем функцию z как функцию только от переменной x , а при дифференцировании по y – как функцию только от y :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln \frac{x}{y} \right)'_x = \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln \frac{x}{y} \right)'_y = \frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{x}{y^2} \right) = -\frac{1}{y},$$

$$\text{grad } z = \frac{1}{x} \vec{i} - \frac{1}{y} \vec{j} = \left\{ \frac{1}{x}; -\frac{1}{y} \right\}.$$

$$\text{В точке } A(1, 1) \text{ grad } z = \frac{1}{1} - \frac{1}{1} = 0.$$

3) Подстановкой частных производных в дифференциальное уравнение получаем: $\frac{\partial z}{\partial x} x + \frac{\partial z}{\partial y} y = \frac{1}{x} x - \frac{1}{y} y = 1 - 1 = 0.$

4) При вычислении второй производной по x также рассматриваем функцию z как функцию только от переменной x , а при дифференцировании по y – как функцию только от y :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{x} \right)'_x = (x^{-1})'_x = \frac{-1}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{-1}{y} \right)'_y = \frac{1}{y^2},$$

$$\frac{-1}{x^2} \cdot x^2 - \frac{1}{y^2} \cdot y^2 = -2.$$

2. Экстремумы функции двух переменных

Понятие максимума, минимума, экстремума функции двух переменных аналогичны соответствующим понятиям функции одной независимой переменной.

При исследовании функции двух переменных на экстремум обратите внимание на следующее:

1. Точки экстремума всегда лежат внутри области определения, а на границе могут находиться только наибольшие и наименьшие значения (см. функцию одной переменной).

2. Экстремум может достигаться в тех точках области определения, где z'_x и z'_y или равны 0 или не существуют.

Схема исследования на нахождение наибольших и наименьших значений:

1) Найти внутренние точки области, где может быть экстремум.

2) Исследовать границы области и найти там точки, где может достигаться наибольшее и наименьшее значения.

3) Вычислить значение функции во всех найденных в п. 1 и 2 точках. Среди них выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^2 - 6xy + 3y^2$ в замкнутой области, ограниченной осью Oy , прямой $y = 2$ и параболой $y = \frac{1}{2}x^2$ при $x \geq 0$ (рис. 2).

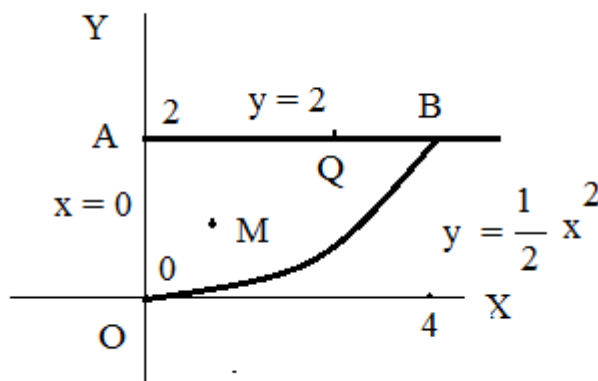


Рис. 2 Область определения функции и ее стационарные точки

Решение. Точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения, могут находиться как внутри области, так и на ее границе. Если функция принимает наибольшее (наименьшее) значение во внутренней точке области, то в этой точке частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 6y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -6x + 6y$ равны нулю. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0, \\ -6x + 6y = 0, \end{cases}$$

найдем две точки $O(0; 0)$ и $M(1; 1)$, в которых обе частные производные равны нулю. Первая из них принадлежит границе области. Следовательно, если функция Z принимает наибольшее (наименьшее) значение во внутренней точке области, то это может быть только в точке $M(1; 1)$. Перейдем к исследованию функции на границе области.

На отрезке OA имеем $x = 0$, поэтому на этом отрезке $z = 3y^2$ ($0 \leq y \leq 2$) есть возрастающая функция от одной переменной y ; наибольшее и наименьшее значение она принимает на концах отрезка OA .

На отрезке AB имеем $y = 2$, поэтому на этом отрезке функция

$$z = 2x^3 - 6x \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 = 2x^3 - 12x + 12 \quad (0 \leq x \leq 2)$$

представляет собой функцию одной переменной x ; ее наибольшее и наименьшее значения находятся среди ее значений в критических точках и на концах отрезка.

Находим производную: $z' = 6x^2 - 12$. Решаем уравнение $z' = 0$ или $6x^2 - 12 = 0$ и находим $x = \pm\sqrt{2}$. Внутри отрезка $0 \leq x \leq 2$ имеется лишь одна критическая точка $x = \sqrt{2}$; соответствующей точкой отрезка AB является точка $Q(\sqrt{2}; 2)$. Итак, из всех значений функции z на отрезке AB наибольшее и наименьшее находятся среди ее значений в точках A , Q и B .

На дуге OB параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ имеем $z = 2x^3 - 6x\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 3\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 = \frac{3}{4}x^4 - x^3$ ($0 \leq x \leq 2$).

Решаем уравнение $z' = 3x^3 - 3x^2 = 0$ или $x^2(x-1) = 0$ и находим его корни: $x = 0$ и $x = 1$. Таким образом, из всех значений функции z на дуге ОВ наибольшее и наименьшее находятся среди ее значений в точках О, Р и В.

Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ в данной замкнутой области находятся среди ее значений в точках О, А, Q, В, Р, М, т. е. среди значений:

$$z(O) = z(0;0) = 0;$$

$$z(A) = z(0;2) = 12;$$

$$z(Q) = z(\sqrt{2};2) = 12 - 8\sqrt{2};$$

$$z(B) = z(2;2) = 4;$$

$$z(P) = z(1;1/2) = -1/4;$$

$$z(M) = z(1;1) = -1.$$

Наибольшее и наименьшее из них равны 12 и -1. Они и являются наибольшим и наименьшим значениями данной функции в данной замкнутой области: $z_{наиб} = 12, z_{наим} = -1$.

3. Неопределенный интеграл

Интегральное исчисление решает следующую задачу: найти функцию $F(x)$ (которая называется первообразной функции $f(x)$), зная её производную $F'(x) = f(x)$ (или дифференциал).

Множество всех первообразных функций $F(x) + C$ для $f(x)$ называется неопределённым интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x) dx$.

Здесь $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x) dx$ – подынтегральным выражением, x – переменной интегрирования, $\int$ - знаком неопределённого интеграла.

Геометрически неопределённый интеграл представляет собой семейство «параллельных» кривых $y = F(x) + C$ (каждому числовому значению C соответствует определённая кривая семейства). График каждой первообразной (кривой) называется интегральной кривой.

Свойства неопределённого интеграла:

1. $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C$, где $F'(x)=f(x)$, C – число;

2. $\int dx = x + C;$
3. $\int 0 \cdot dx = C;$
4. $(\int f(x) \cdot dx)'_x = f(x);$
5. $d(\int f(x) \cdot dx) = f(x)dx$
6. $\int d(F(x)) = F(x) + C;$
7. $\int C \cdot f(x) \cdot dx = C \cdot \int f(x) \cdot dx;$
8. $\int (f(x) \pm g(x)) \cdot dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx ;$
9. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \ln(f(x)) + C ;$
10. $\int f(kx + b) \cdot dx = \frac{1}{k} \cdot F(kx + b) + C$

Таблица неопределенных интегралов

$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$	$\int \sin (kx + b)dx = -\frac{1}{k} \cos (kx + b) + C$
$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$	$\int \cos (kx + b)dx = \frac{1}{k} \sin (kx + b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 (kx + b)} dx = \frac{1}{k} \operatorname{tg} (kx + b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 (kx + b)} dx = -\frac{1}{k} \operatorname{ctg} (kx + b) + C$
$\int e^x \cdot dx = e^x + C$	$\int e^{(kx+b)} \cdot dx = \frac{1}{k} e^{(kx+b)} + C$
$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^{(kx+b)} \cdot dx = \frac{1}{k} \frac{a^{(kx+b)}}{\ln a} + C$
$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{kx + b} dx = \frac{1}{k} \ln kx + b + C$
$\int x^m \cdot dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \quad \text{где } m \neq -1$	$\int (kx+b)^m dx = \frac{1}{k} \frac{(kx+b)^{m+1}}{m+1} + C, \quad \text{где } m \neq -1$
$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{1}{(kx+b)^2 + a^2} dx = \frac{1}{k} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{(kx+b)}{a} + C$
$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$	$\int \frac{1}{(kx+b)^2 - a^2} dx = \frac{1}{k} \frac{1}{2a} \ln \left \frac{(kx+b)-a}{(kx+b)+a} \right + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - (kx + b)^2}} dx = \frac{1}{k} \arcsin \frac{(kx + b)}{a} + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$	

Замена переменной под знаком неопределенного интеграла:

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \cdot dx = \int f(t) \cdot dt, \quad \text{где} \quad \begin{cases} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) \cdot dx \end{cases}$$

Метод интегрирования по частям:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx,$$

Интегрирование дробно-рациональных функций:

Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \dots (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \dots (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m},$$

можно представить (и притом единственным образом) в виде следующей суммы простейших дробей:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \dots + \frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} + \dots + \\ & \frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \dots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+p_mx+q_m} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_mx+q_m)^2} + \\ & \dots + \frac{M_{s_m}x+N_{s_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}}, \end{aligned}$$

где $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, C_1, D_1, \dots, M_1, N_1, \dots$ - некоторые действительные коэффициенты.

4. Производная

Определение производной: $y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Свойства и правила дифференцирования:

1. $(\text{const})' = 0$;
2. $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$;
3. $(C \cdot u(x))' = C \cdot u'(x)$;

$$4. (u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x);$$

$$5. \left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}.$$

$y(x)$	$y'(x)$	$y(u(x))$	$y'_x(u(x)) = y'_u \cdot u'_x$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin u$	$\cos u \cdot u'$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} u$	$\frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{ctg} u$	$-\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos u$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} u$	$\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcctg} u$	$-\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
e^x	e^x	e^u	$e^u \cdot u'$
a^x	$a^x \cdot \ln a$	a^u	$a^u \cdot \ln a \cdot u'$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln u$	$\frac{1}{u} \cdot u'$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$\log_a u$	$\frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
x^m	$m \cdot x^{m-1}$	u^m	$m \cdot u^{m-1} \cdot u'$
x	1	u	u'
x^2	$2 \cdot x$	u^2	$2 \cdot u \cdot u'$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2} \cdot u'$

Пример 1. $\int f(x) dx = \int (6 - \sqrt{x}) dx.$

Решение. Используем теорему: интеграл от разности функций равен разности интегралов.

$$\int (6 - \sqrt{x}) dx = \int 6 dx - \int \sqrt{x} dx = 6 \int dx - 2 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 6x - 2 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C.$$

Пример 2. Вычислить $\int f(x) dx = \int \sin 2x dx$.

Решение. Сравним наш интеграл с табличным: $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

У нас $f(x) = \sin 2x$, формально, интеграл не табличный. Используем теорему о линейной замене переменной:

если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$.

В интеграле $ax+b = 2x$, т. е. $a = 2$, следовательно, $\int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C$.

Проверим полученный результат дифференцированием

$$\left(-\frac{\cos 2x}{2} + C \right)' = -\frac{1}{2}(-\sin 2x)2 + 0 = \sin 2x.$$

Интеграл взят правильно.

Пример 3. $\int f(x) dx = \int \sin^2 x \cos x dx$, т. е. $f(x) = \sin^2 x \cos x$.

Решение. Так как $(\sin x)' = \cos x$, то используем метод «подведение под знак дифференциала»:

У нас $\sin x = t$. Тогда $dt = d(\sin x) = \cos x dx$, и новая переменная интегрирования будет уже не t , а $\sin t$.

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x (\cos x dx) = \int (\sin x)^2 d(\sin x) = \frac{(\sin x)^3}{3} + C.$$

Пример 4. $\int f(x) dx = \int \frac{x^2}{x^3+7} dx$, т. е. $f(x) = \frac{x^2}{x^3+7}$.

Решение.

Так как $(x^3+7)' = 3x^2$, то используем метод «подведение под знак дифференциала», $x^3+7 = t$. Тогда $dt = d(x^3+7) = 3x^2 dx$. Домножим в числителе на 3, при этом надо и знаменатель умножить на 3.

$$\int \frac{x^2}{x^3+7} dx = \int \frac{3x^2 dx}{3(x^3+7)} = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 dx}{x^3+7}.$$

Так как $(x^3 + 7)' = 3x^2$, то $3x^2 dx = d(x^3 + 7)$, тогда

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 7} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 dx}{x^3 + 7} = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3 + 7)}{x^3 + 7} = \frac{1}{3} \ln(x^3 + 7) + C.$$

Проверим дифференцированием:

$$(\ln(x^3 + 7))' = \frac{1}{x^3 + 7} (3x^2 + 0) = \frac{3x^2}{x^3 + 7}.$$

Пример 5. Найти $\int \frac{e^{\operatorname{arctg}(x)}}{1+x^2} dx$.

Решение. Используем теорему о замене переменной

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \cdot dx = \int f(t) \cdot dt, \text{ где } \begin{cases} t = \varphi(x), \\ dt = \varphi'(x) \cdot dx. \end{cases}$$

Особенностью данного интеграла является то обстоятельство, что его подынтегральное выражение содержит множитель $\frac{dx}{1+x^2}$, который является дифференциалом функции $\operatorname{arctg} x$. Поэтому в данном интеграле целесообразно ввести замену переменной: $t = \operatorname{arctg} x$. Отсюда $dt = d(\operatorname{arctg}(x)) = \frac{1}{1+x^2} dx$ и $e^{\operatorname{arctg} x} = e^t$. Подставляя в исходный интеграл, имеем

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg}(x)}}{1+x^2} dx = \int e^{\operatorname{arctg}(x)} d(\operatorname{arctg}(x)) = e^{\operatorname{arctg}(x)} + C.$$

Пример 6. Найти $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx$.

Решение. Здесь уместна замена $t = \cos x$, т. к. $dt = -\sin x dx$, и $\sin^3 x dx = \sin^2 x \cdot \sin x dx$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x \cdot dx &= \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x (\sin x \cdot dx) = -\int (1 - t^2) t^2 \cdot dt = \int (t^4 - t^2) dt = \\ &= \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\sin^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

Пример 7. Найти $\int x \sin(x) dx$.

Решение. Используем метод интегрирования по частям:

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int v(x) u'(x) dx.$$

Так как производная от x равна 1, то возьмем $u = x$. Используем формулу, приведя схему записи, удобную при использовании метода интегрирования по частям.

$$\int x \sin(x) dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cdot \cos x + \int \cos x dx = -x \cdot \cos x + \sin x + C.$$

Пример 8. Найти $\int \frac{x+1}{x(x-1)} dx$.

Решение. Используем метод разложения на простейшие. Знаменатель имеет два различных действительных корня, разложим подынтегральную функцию на простейшие слагаемые:

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + Bx}{x(x-1)} = \frac{(A+B)x - A}{x(x-1)}.$$

Приравняем числители и учтем, что коэффициенты при одинаковых степенях x , стоящие слева и справа, должны совпадать:

$$x+1 = (A+B)x - A \Rightarrow A = -1, A+B=1 \Rightarrow B=2$$

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x+1}{x(x-1)} dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{2}{x-1} \right) dx = -\ln|x| + 2\ln|x-1| + C.$$

Пример 9. Найти $\int \frac{2x+1}{x(x-1)^2} dx$.

Решение. Используем метод разложения на простейшие. Знаменатель имеет действительные корни, причем корень -1 имеет кратность два. Разложим подынтегральную функцию на простейшие слагаемые:

$$\frac{2x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Dx}{x(x-1)^2}.$$

Приравняем числители и учтем, что коэффициенты при одинаковых степенях x , стоящие слева и справа, должны совпадать:

$$2x+1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Dx = (A+B)x^2 + (-2A-B+D)x + A$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B+D=2 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow A=1, B=-1, D=3$$

$$\frac{2x+1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{2x+1}{x(x-1)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} \right) dx = \ln|x| - \ln|x-1| + 3 \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C.$$

Пример 10. Найти $\int \frac{x dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

Решение. Используем метод разложения на простейшие, разложим подынтегральную функцию на сумму простейших дробей:

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+D}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+D)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}$$

Приравняем числители

$$x \equiv A(x^2+1) + (Bx+D)(x+1); \quad 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 0 \equiv (B+A)x^2 + (B+D)x + (A+D).$$

Так как коэффициенты при одинаковых степенях x , стоящие слева и справа, должны совпадать, то

$$\begin{cases} B+A=0 \\ B+D=1 \\ A+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B+A=0 \\ B-A=1 \\ A+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2B=1 \\ \frac{1}{2}+D=1 \\ A+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=\frac{1}{2} \\ D=\frac{1}{2} \\ A=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(x+1)(x^2+1)} &= \int \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{4} \int \frac{2x dx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \arctg x + C \end{aligned}$$

Здесь использовано

$$\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C,$$

$$\int \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

В последнем интеграле использовано свойство, в котором используется условие, что числитель есть производная знаменателя.

Пример 11. Найти $\int \frac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x+2}+3} dx$.

Решение. Сделаем замену переменной, позволяющую избавиться от иррациональности:

$$x+2=t^6 \Rightarrow \sqrt[3]{x+2}=t^2, \quad \sqrt{x+2}=t^3, \quad dx=d(t^6-2)=6t^5 dt$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x+2}+3} dx = \int \frac{t^3 \cdot 6t^5 dt}{t^2+3} = 6 \int \frac{t^8 dt}{t^2+3} =$$

Под интегралом стоит неправильная дробь, поэтому разделим числитель на знаменатель и вычислим получившиеся интегралы:

$$\begin{aligned} \frac{t^8}{t^2+3} &= t^6 - 3t^4 + 9t^2 - 27 + \frac{81}{t^2+3} \\ &= \int \frac{t^8}{t^2+3} dt = \int \left(t^6 - 3t^4 + 9t^2 - 27 + \frac{81}{t^2+3} \right) dt = \\ &= \frac{t^7}{7} - \frac{3t^5}{5} + \frac{9t^3}{3} - 27t + \frac{81}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + C = \\ &= \frac{(\sqrt[6]{x+2})^7}{7} - \frac{3(\sqrt[6]{x+2})^5}{5} + 3(\sqrt[6]{x+2})^3 - 27(\sqrt[6]{x+2}) + \frac{81}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{(\sqrt[6]{x+2})}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

5. Определенный интеграл

Пример 1. Вычислить $\int_0^2 (x^2 - x + \sqrt{x}) dx$.

Так как интеграл от суммы функций равен сумме интегралов, то

$$\int_0^2 (x^2 - x + \sqrt{x}) dx = \int_0^2 x^2 dx - \int_0^2 x dx + \int_0^2 \sqrt{x} dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^{3/2}}{3/2} \right) \Big|_0^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + \frac{2}{3} \cdot 2^{3/2} \right) - 0.$$

Пример 2. Вычислить $\int_{\sqrt[7]{3}}^{\sqrt[98]{3}} \frac{\sqrt{3x^2-49}}{x} dx$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель подынтегральной функции на x , получим

$$\int_{\sqrt[7]{3}}^{\sqrt[98]{3}} \frac{\sqrt{3x^2-49}}{x} dx = \int_{\sqrt[7]{3}}^{\sqrt[98]{3}} \frac{\sqrt{3x^2-49} \cdot x \cdot dx}{x^2}.$$

Сделаем замену переменной. Пусть $\sqrt{3x^2-49} = t$,

тогда $3x^2 - 49 = t^2 \Rightarrow 3x^2 = t^2 + 49 \Rightarrow x^2 = \frac{t^2 + 49}{3} \Rightarrow 2x \cdot dx = \frac{2}{3} t \cdot dt \Rightarrow x \cdot dx = \frac{1}{3} t \cdot dt$.

Подставим найденные выражения в подынтегральную функцию, получим: $\frac{\sqrt{3x^2 - 49}(x \cdot dx)}{x^2} = \frac{t \cdot \frac{1}{3}(t \cdot dt)}{\frac{1}{3}(t^2 + 49)} = \frac{t^2}{t^2 + 49} dt$.

Теперь в подынтегральном выражении другая переменная (t), поэтому нужно заменить пределы интегрирования:

$$t = \sqrt{3x^2 - 49} \Rightarrow t_{\text{нижн}} = \sqrt{3x_{\text{нижн}}^2 - 49} = \sqrt{3 \frac{49}{3} - 49} = 0; \quad t_{\text{верхн}} = \sqrt{3x_{\text{верхн}}^2 - 49} = \sqrt{3 \frac{98}{3} - 49} = 7.$$

Подставим в данный интеграл полученные значения, тогда получим

$$\int_{\frac{7}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{\frac{98}{3}}} \frac{\sqrt{3x^2 - 49}}{x} dx = \int_0^7 \frac{t^2}{t^2 + 49} dt = \int_0^7 \frac{(t^2 + 49) - 49}{t^2 + 49} dt = \int_0^7 \left(1 - \frac{49}{t^2 + 49}\right) dt = \left(t - 49 \frac{1}{7} \operatorname{arctg} \frac{t}{7}\right) \Big|_0^7 = \left(7 - 7 \operatorname{arctg} \frac{7}{7}\right) - \left(0 - 7 \operatorname{arctg} \frac{0}{7}\right) = 7 - \operatorname{arctg} 1 = 7 - \frac{\pi}{4} = \frac{28 - \pi}{4}.$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{5}{x}$ и $x + y = 6$.

Решение. Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ (при условии $f_2(x) \geq f_1(x)$), можно найти по формуле $S = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$.

Первое уравнение задаёт гиперболу, а второе – прямую линию. Найдём точки их пересечения: $\frac{5}{x} = 6 - x \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = 1 \end{cases}$,

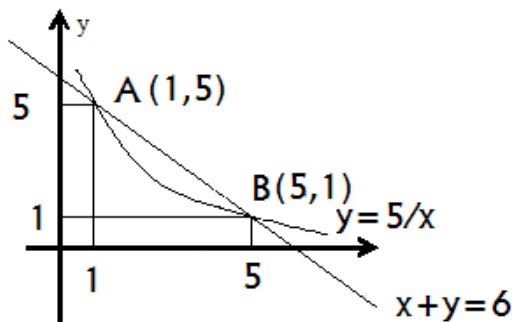


Рис. 3

Обозначим эти точки через A и B . Итак, $A(1; 5)$, $B(5; 1)$. Искомая площадь S равна разности площадей фигур, ограниченных линиями $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$,

$y = 6 - x$ (обозначим эту площадь через S_1) и линиями $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$, $y = \frac{5}{x}$ — площадь S_2 (рис.3). Таким образом

$$S = \int_1^5 \left(6 - x - \frac{5}{x} \right) dx = \int_1^5 6 dx - \int_1^5 x dx - \int_1^5 \frac{5}{x} dx = 6x \Big|_1^5 - \frac{x^2}{2} \Big|_1^5 - 5 \ln x \Big|_1^5 = 30 - 6 - \frac{25}{2} + \frac{1}{2} - 5(\ln 5 - \ln 1) = 12 - 5 \ln 5.$$

Ответ: $S = (12 - 5 \ln 5) e d^2$.

Пример 4. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси O_x фигуры, ограниченной прямой $y = x$ и параболой $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 4).

Найдем точки пересечения линий. Для этого решим уравнение $x = \sqrt[3]{x}$. Получим $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

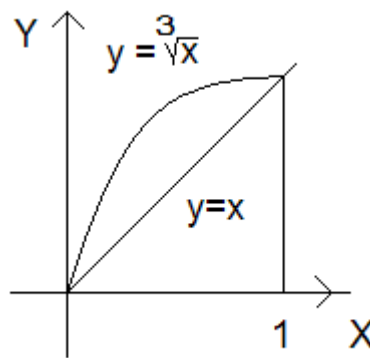


Рис. 4

Объём тела может быть вычислен по формуле:

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_a^b f_1^2(x) dx - \pi \int_a^b f_2^2(x) dx, \text{ где } f_1(x) = \sqrt[3]{x}, f_2(x) = x.$$

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^1 (\sqrt[3]{x})^2 dx - \pi \int_0^1 x^2 dx = \pi \frac{x^{5/3}}{5/3} \Big|_0^1 - \pi \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3} \right) = \pi \frac{4}{15}.$$

Ответ: $V = \pi \frac{4}{15}$.

Контрольная работа № 3

1. Дана функция двух переменных

1) Для функции из пункта 1 найти область определения функции двух переменных $z = f(x, y)$. Изобразить ее на координатной плоскости и заштриховать.

2) Для функции из пункта 2 найти градиент и проверить, удовлетворяет ли функция двух переменных $z = f(x, y)$ указанному дифференциальному уравнению первого порядка.

№	1	2
1.1	$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$.	$z = y \cdot \sin(x^2 - y^2), \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.
1.2	$z = \frac{1}{(x-2)(y+1)}$	$z = y \cdot e^{x^2 - y^2}, \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.
1.3	$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$	$z = x \cdot \sin(x^2 - y^2), x^2 \frac{\partial z}{\partial y} + xy \frac{\partial z}{\partial x} = xy$.
1.4	$z = \frac{y-3}{x^2 + y^2}$	$z = \operatorname{tg}^3(2x-3y), 3 \frac{\partial z}{\partial x} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
1.5	$z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$.	$z = e^{\frac{x}{y^2}}, 2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
1.6	$z = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$	$z = x \cdot e^{y^2 - x^2}, x^2 \frac{\partial z}{\partial y} + xy \frac{\partial z}{\partial x} = zy$.
1.7	$z = \sqrt{xy}$	$z = \ln(x^2 + xy + y^2), x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2$.
1.8	$z = x \ln y$	$z = y \ln(x^2 - y^2), \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.
1.9	$\ln(x^2 + y^2 - 4)$	$z = x \cdot e^{y^2 - x^2}, \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{x^2}$.
1.10.	$z = \frac{2xy}{x^2 + y^2 - 4}$	$z = e^{\frac{y}{x}} + \frac{x}{y}, x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
1.11	$z = \frac{x+y}{(x+y)(y-3)}$	$z = e^{\frac{y}{x}}, x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
1.12	$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$	$z = \sin \frac{x}{y}, x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.
1.13	$z = \ln(xy)$	$z = \ln(e^x + e^y), \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

№	1	2
1.14	$z = \frac{x^3 + 4xy + y^2}{xy}$	$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$
1.15	$z = \frac{4 + x}{(x + 3)(y - 5)}$	$z = \operatorname{tg} \frac{x}{y}, x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$
1.16	$z = \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}} - 1$	$z = \operatorname{tg} \frac{y}{x}, x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$
1.17	$z = \sqrt{\frac{x}{y}}$	$z = \frac{x^3 - y^3}{x^3 - 4y^3}, x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$
1.18	$z = \frac{x}{y^2}$	$z = \sin(x^2 + y^2), x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$
1.19	$z = \ln(16 - x^2 - y^2)$	$z = \ln(x^2 + y^2), x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$
1.20	$z = \ln(xy^2).$	$z = \frac{y}{x^2 - y^2}, \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$

2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области D , заданной системой неравенств. Сделать чертеж

№	Функция	Область
2.1.	$z = x^2 + y^2 - 9xy + 27;$	$0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3.$
2.2.	$z = x^2 + 2y^2 + 1;$	$x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3.$
2.3.	$z = 3 - 2x^2 - xy - y^2;$	$x \leq 1, y \geq 0, y \leq x.$
2.4.	$z = x^2 + 3y^2 + x - y;$	$x \geq 1, y \geq -1, x + y \leq 1.$
2.5.	$z = x^2 + 2xy + 2y^2;$	$-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2.$
2.6.	$z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4;$	$x \geq -1, y \geq -1, x + y \leq 1.$
2.7.	$z = 10 + 2xy - x^2;$	$0 \leq y \leq 4 - x^2.$
2.8.	$z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x;$	$x \leq 0, y \leq 0, x + y + 2 \geq 0.$
2.9.	$z = x^2 + xy - 2;$	$4x^2 - 4 \leq y \leq 0.$
2.10.	$z = x^2 + xy;$	$-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3.$
2.11.	$z = x^2 + 2xy + 2y^2;$	$0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2.$
2.12.	$z = 2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x + 6;$	$0 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 4.$
2.13.	$z = 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y;$	$0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 3.$
2.14.	$z = 2xy - 3x^2 - 3y^2 + 4x + 4y;$	$0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 2.$

- 2.15. $z = x^3 + y^3 - 3xy$; $0 \leq x \leq 2$; $0 \leq y \leq 3$.
- 2.16. $z = \frac{x^2}{2} - xy$ $y \geq \frac{x^2}{3}$; $y \leq 3$.
- 2.17. $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$; $x \geq 0$; $y \geq 0$; $2x + 3y \leq 12$.
- 2.18. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$; $x \leq 0$; $y \leq 4$; $x + y \geq -3$.
- 2.19. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$; $0 \leq x \leq 2$; $-1 \leq y \leq 1$.
- 2.20. $z = x^3 + y^3 - 9xy - 25$; $0 \leq x \leq 5$; $0 \leq y \leq 5$.

3. Найти неопределенные и определенный интегралы. В двух первых примерах (п. а) и б)) проверить результаты дифференцированием.

№	а	б	в	г
3.1	$\int \sin(2x) dx$	$\int e^x \sqrt{1+e^x} dx$	$\int x e^{3x} dx$	$\int_0^2 \sqrt{1+4x} dx$
3.2	$\int \cos(2x) dx$	$\int \frac{x dx}{(x^2+4)^3}$	$\int x \ln(2x) dx$	$\int_0^1 3^{x+1} dx$;
3.3	$\int \frac{1}{2x+3} dx$	$\int e^{\sin x} \cos x dx$	$\int x \arctg x dx$	$\int_1^2 \sqrt[3]{2+x} dx$
3.4	$\int \sqrt{1+x} dx$	$\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$	$\int x \sin 2x dx$	$\int_1^2 \sqrt[3]{5-x} dx$
3.5	$\int \sqrt[4]{2x+1} dx$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x (3 \tg x + 1)}$;	$\int x \cos 3x dx$;	$\int_0^3 e^{2-3x} dx$
3.6	$\int \frac{1}{\sin^2(3x-2)} dx$	$\int \frac{\tg x}{\cos^2 x} dx$	$\int x e^{-x} dx$	$\int_0^2 \sqrt{2x+5} dx$
3.7	$\int \frac{1}{\sqrt{x+2}} dx$	$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$	$\int (2x+1) \arctg x dx$	$\int_0^2 \sqrt{2x+5} dx$
3.8	$\int \sqrt{2x+1} dx$	$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}}$	$\int (3x+5) \ln x dx$	$\int_1^3 \frac{1}{2x-1} dx$
3.9	$\int e^{1-2x} dx$	$\int \cos x \cdot 3^{\sin x} dx$	$\int x \sin(4x) dx$	$\int_2^3 (1-2x) dx$
3.10	$\int \cos(1-x) dx$	$\int x \sqrt{x^2+1} dx$	$\int x \cos(2x) dx$	$\int_{-2}^2 (x^4+3) dx$
3.11	$\int \sqrt[4]{1-2x} dx$	$\int \frac{dx}{x(2 \ln x + 3)}$	$\int x \ln(x^2+1) dx$	$\int_0^3 \frac{1}{x+2} dx$

№	а	б	в	г
3.12	$\int e^{2x+3} dx$	$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\int (2x-1)e^{3x} dx$	$\int_1^2 \sqrt{4x-1} dx$
3.13	$\int (1-3x)^3 dx$	$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$	$\int (2x-1) \cos x dx$	$\int_{-2}^2 (x^3-2) dx$
3.14	$\int \sin(3x-1) dx$	$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3+2 \cos x}}$	$\int (4x+3) \sin x dx$	$\int_0^3 e^{2x-1} dx;$
3.15	$\int (2x-3)^4 dx$	$\int \frac{(\sqrt[3]{4+\ln x}) dx}{x}$	$\int (x-1) \arctg x dx$	$\int_0^1 2^{x-1} dx;$
3.16	$\int \sin(2-5x) dx$	$\int e^{\cos 2x} \sin 2x dx$	$\int (x-2) e^{-x} dx$	$\int_{-2}^0 \sqrt{1-3x} dx$
3.17	$\int \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} dx$	$\int \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$	$\int (x+2) \sin 5x dx$	$\int_{-1}^2 (1-4x^3) dx;$
3.18	$\int 2^{1-x} dx$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\tg x}}$	$\int (x-1) \ln x dx$	$\int_2^5 (x^3+2x) dx$
3.19	$\int \frac{1}{\cos^2(3x-2)} dx$	$\int \frac{\sqrt{\ctg x}}{\sin^2 x} dx$	$\int (1-x) \arctg x dx$	$\int_{-1}^2 (4x^2-1) dx;$
3.20	$\int \frac{1}{3-4x} dx$	$\int \frac{dx}{x(2 \ln x+3)}$	$\int x \cdot \cos(2x+1) dx$	$\int_2^5 (x^3-x) dx$

4. Геометрические приложения определенного интеграла

4.1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 3x^2 + 1$ и прямой $y = 3x + 7$.

4.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$ и прямой $y = 5$.

4.3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 1 - 3x^2$ и прямой $y = -2$.

4.4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 3 - x^2$ и прямой $y = -1$.

4.5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$ и прямой $y = \frac{1}{2}$.

4.6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$ и прямой $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4.7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \cos x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ и прямой $y = \frac{1}{2}$.

4.8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \cos x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ и прямой $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4.9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = e^{2x}$, осью ОХ и прямыми $x = -1$, $x = 2$.

4.10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = \sin^2 x$, $0 \leq x \leq \pi$.

4.11. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

4.12. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной полуэллипсом $y = 3\sqrt{1-x^2}$.

4.13. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной гиперболой $y = \frac{2}{1+x}$ и прямыми $x = 1$, $x = 4$.

4.14. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{2}$ и кубической параболой $y = \frac{x^3}{8}$.

4.15. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и $y = \sqrt[3]{x}$.

4.16. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной параболой $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$.

4.17. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$ и $y = 2\sqrt{x}$.

4.18. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной полуэллипсом $y = 3\sqrt{4-x^2}$.

4.19. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной гиперболой $y = \frac{1}{1+2x}$ и прямыми $x = 3$, $x = 5$.

4.20. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2}{3}$ и кубической параболой $y = \frac{x^3}{9}$.

Контрольная работа 4

Основные темы и рекомендуемая литература для их изучения

№ п/п	Тема	Литература
01	Дифференциальные уравнения первого порядка	[1, гл. 12 (12.1 – 12.6)] [2, гл. 12 (§57-61)]
02	Дифференциальные уравнения второго порядка	[1, гл. 12 (12.7 – 12.9)] [2, гл. 12 (§62-64)]
03	Числовые ряды	[1, гл. 12 (12.1 – 12.6)] [2, гл. 8 (§41-42)]
04	Функциональные ряды	[1, гл. 12 (12.7 – 12.8)] [2, гл. 8 (§43-44)]

Вопросы для самопроверки

1. Дифференциальные уравнения первого порядка

1. Дайте определения дифференциального уравнения первого порядка и его общего и частного решений (интеграла). Сформулируйте задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка и укажите ее геометрический смысл.

2. Дайте геометрическое истолкование дифференциального уравнения второго порядка, выясните геометрический смысл общего и частного решений.

3. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего условию $y|_{x=x_0} = y_0$.

4. Дайте определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными. Изложите метод нахождения его общего решения.

5. Дайте определение линейного дифференциального уравнения первого порядка. Изложите метод вариации произвольных постоянных. Приведите пример.

2. Дифференциальные уравнения второго порядка

1. Изложите метод решения дифференциального уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

2. Изложите метод решения дифференциального уравнения вида $y'' = f(x, y')$.

3. Изложите метод решения дифференциального уравнения вида $y'' = f(y, y')$.

3. Ряды

1. Дайте определение сходящегося и расходящегося рядов. Докажите необходимый признак сходимости ряда.

2. Сформулируйте теорему о сравнении рядов с положительными членами. Приведите пример.

3. Сформулируйте признак Даламбера сходимости рядов с положительными членами. Приведите пример.

4. Сформулируйте признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов.

5. Дайте определение абсолютно сходящегося ряда. Приведите пример абсолютно и условно сходящихся рядов.

6. Дайте определение области сходимости функционального ряда. Выведите формулу для вычисления радиуса сходимости.

7. Ряды Тейлора и Маклорена. Условие разложимости функции в ряд Тейлора.

8. Разложите функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = e^x$, $y = \ln(1+x)$, $y = (1+x)^m$ в ряды Маклорена.

Методические указания

1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнения, связывающие независимую переменную, искомую функцию и её производные, называются **дифференциальными уравнениями**. **Решением** дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$.

Решение. Данное уравнение есть уравнение с разделяющимися переменными, так как коэффициенты при dx и dy зависят каждый от двух переменных, но расположенных в разных сомножителях. Разделим обе части уравнения на произведение $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ (считая, что $1-x^2 \neq 0$, $1-y^2 \neq 0$), тогда получим $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = 0$.

Это – дифференциальное уравнение с разделенными переменными.

Находим общее решение $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy = C$, где C – произвольная постоянная, например, можно вместо « C » написать $(-\frac{1}{2}C)$, тогда $-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-y^2} = -\frac{1}{2}C$.

Умножим обе части на $\left(-\frac{1}{2}\right)$, тогда решение будет иметь вид $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C$.

Ответ: $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C$ – общее решение данного уравнения.

Пример 2. Найти общее решение уравнения первого порядка $y' - \frac{2}{x}y = x$.

Решение. Определим вид этого уравнения. Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$ называется линейным. В нашем случае $p(x) = -\frac{2}{x}$; $q(x) = x$. Пусть $y = u \cdot v$, причём $u(x)$ и $v(x)$ пока неизвестны, тогда $y' = u'v + v'u$. Подставим эти значения в данное уравнение, тогда получим

$$u'v + v'u - \frac{2}{x}uv = x.$$

Группируем члены: $u'v + u\left(v' - \frac{2}{x}v\right) = x.$

Пусть $v' - \frac{2}{x}v = 0$ (1), тогда остаётся $u' \cdot v = x.$ (2).

Находим сначала v из (1): $\frac{dv}{dx} = \frac{2}{x}v$; $\frac{dv}{v} = \frac{2}{x}dx$; $\int \frac{dv}{v} = 2 \int \frac{dx}{x}$;

$$\ln v = 2 \ln x \Rightarrow v = x^2 + C.$$

Возьмём любое частное решение (например, при $C=0$ $v = x^2$) и подставим его в (2), получим $u' \cdot x^2 = x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$; $du = \frac{dx}{x}$; $u = \int \frac{dx}{x} + C \Rightarrow u = \ln|x| + C.$

Окончательно получаем $y = vu = (\ln x + C) \cdot x^2$ – искомое общее решение.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $x \cdot y' - y = x \cdot e^{-\frac{y}{x}}.$

Решение. Все слагаемые при dx и dy являются многочленами первой степени относительно двух переменных « x » и « y », следовательно, оно однородное. Такое уравнение можно привести к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$ Для этого все члены уравнения разделим на « x », т. е. на « x » в степени однородности, получим $y' - \frac{y}{x} = e^{-\frac{y}{x}}$ – это однородное уравнение. Введём новую переменную $t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = t \cdot x \Rightarrow y' = t' \cdot x + t \cdot 1$ (производную tx вычисляем как производную произведения).

Подставим в уравнение вместо y и y' найденные выражения, получим

$$t' \cdot x + t - t = e^{-t} \Rightarrow t' \cdot x = e^{-t} \Rightarrow \frac{dt}{dx} x = e^{-t} \Rightarrow x \cdot dt = e^{-t} \cdot dx \Rightarrow$$

$$e^t dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int e^t \cdot dt = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow e^t = \ln x + C.$$

C – любая постоянная. Возьмём вместо C – $\ln C$, тогда получим $e^t = \ln x + \ln C \Rightarrow e^t = \ln(Cx) \Rightarrow t = \ln(\ln(Cx)) \Rightarrow \frac{y}{x} = \ln(\ln(Cx)) \Rightarrow y = x \cdot \ln(\ln(Cx))$ – общее решение.

2. Дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка – это равенство, содержащее независимую переменную (аргумент) « x », неизвестную функцию от этого аргумента « y », а также её производные y' , y'' .

В некоторых случаях дифференциальное уравнение второго порядка можно привести к уравнению первого порядка (понизить порядок уравнения).

Вот основные случаи:

1) $F(x, y'') = 0$ - уравнение не содержит y , y' .

Такое уравнение приводят к виду $y'' = f(x)$ и затем дважды интегрируют обе части равенства

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' = 30x$.

Решение.

$$y'' = 30x \Rightarrow y'' \cdot dx = 30x \cdot dx \Rightarrow \int y'' \cdot dx = \int 30x \cdot dx \Rightarrow y' = 15x^2 + C \Rightarrow \\ y' \cdot dx = (15x^2 + C) \cdot dx \Rightarrow \int y' \cdot dx = \int (15x^2 + C) \cdot dx \Rightarrow y = 5x^3 + Cx + C_2.$$

$y = 5x^3 + Cx + C_2$ – общее решение данного уравнения.

2) $F(x, y', y'') = 0$ – уравнение не содержит переменную « y ».

Введём новую переменную $z = y'$, тогда $y'' = z'$, и уравнение примет вид $F(x, z, z') = 0$, т. е. получили уравнение первого порядка с неизвестной функцией « z », зависящей от аргумента « x ».

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' + y' \frac{1}{x} - 4 = 0$.

Решение. Пусть $z = y'$, тогда $y'' = z'$ и уравнение примет вид $z' + z \cdot \frac{1}{x} - 4 = 0$.

Это линейное уравнение первого порядка. Решаем его, сделав замену $y = u \cdot v$, тогда

$$u'v + uv' + uv \frac{1}{x} - 4 = 0 \Rightarrow u'v + u(v' + v \frac{1}{x}) - 4 = 0.$$

$$\text{Пусть } v' + v \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} v' + v \frac{1}{x} = 0 \\ u'v = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{1}{x} \\ u = \int 4x dx = 2x^2 + C \end{cases} \Rightarrow z = (2x^2 + C) \frac{1}{x} = 2x + \frac{C}{x}.$$

Вспомним, что $z = y'$, тогда $y' = 2x + \frac{C}{x}$. Получили уравнение первого порядка, следовательно, понизили порядок уравнения. Теперь остаётся его решить. Это уравнение с разделёнными переменными, поэтому можно интегрировать обе части: $\int y' dx = \int (2x + \frac{C}{x}) dx \Rightarrow y = x^2 + C \ln x + C_2$ – общее решение.

3) $F(y, y', y'') = 0$ - уравнение не содержит переменную « x », тем не менее « y » и её производные от неё зависят.

$$\text{Делаем замену } y' = p(y) \Rightarrow y'' = p'_y \cdot y'_x = p'_y \cdot p.$$

Подставим в уравнение вместо y' и y'' найденные значения и получим уравнение с аргументом « y » и неизвестной функцией « p », которую нужно найти, при этом получим уравнение первого порядка вида: $F(y, p, p'_y \cdot p) = 0$.

Пример 3. Найти частное решение дифференциального уравнения $y \cdot y'' - (y')^2 = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y_0|_{x_0=0} = 7$; $y'_0|_{x_0=0} = 63$.

Решение. Введём новую переменную « p », зависящую от « y »: $p = y'$, тогда $y'' = p'_y \cdot p$. Подставим эти выражения в уравнение вместо y и y' , получим $y \cdot p'_y \cdot p - p^2 = 0 \Rightarrow p(y \cdot p'_y - p) = 0$.

Возможны два случая:

1) $p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = \text{const}$. Это решение не является общим, так как общее решение уравнения второго порядка должно содержать две произвольных постоянных. Его называют – особое решение.

2) $y \cdot p'_y - p = 0$. Получили уравнение первого порядка, т. е. понизили порядок данного уравнения.

Решаем полученное уравнение первого порядка.

Это уравнение с разделяющимися переменными, поэтому $y \cdot p'_y - p = 0 \Rightarrow y \cdot p'_y \cdot dy - p \cdot dy = 0 \Rightarrow y \cdot dp = p \cdot dy \Rightarrow$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln p = \ln y + \ln C \Rightarrow p = C \cdot y.$$

$$p = C \cdot y \Rightarrow y' = C \cdot y \Rightarrow y' \cdot dx = C \cdot y \cdot dx \Rightarrow dy = C \cdot y \cdot dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = C \cdot dx \Rightarrow$$

$$\ln y = Cx + C_2 \Rightarrow y = e^{Cx+C_2}.$$

$y = e^{Cx+C_2}$ – общее решение данного уравнения.

Начальные условия подставляем в систему

$$\begin{cases} y = e^{Cx+C_2} \\ y' = C \cdot e^{Cx+C_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 = e^{C \cdot 0 + C_2} \\ 63 = C \cdot e^{C \cdot 0 + C_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 = e^{C_2} \\ 63 = C \cdot e^{C_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = \ln 7 \\ 63 = C \cdot 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 9 \\ C_2 = \ln 7. \end{cases}$$

Подставим найденные значения постоянных в общее решение, тогда получим частное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям:
 $y = e^{Cx+C_2} = e^{Cx} \cdot e^{C_2} \Rightarrow y_* = 7e^{9x}$.

3. Ряды

1) Знакоположительные ряды

Числовым рядом (или просто **рядом**) называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \text{ где}$$

$u_1, u_2, \dots, u_n$ — действительные или комплексные числа, называемые **членами ряда**, u_n — общим членом ряда.

Ряд считается заданным, если известен общий член ряда u_n , выраженный как функция его номера n : $u_n = f(n)$.

Сумма первых n членов ряда называется n -й частичной суммой ряда и обозначается через S_n , т.е. $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Рассмотрим частичные суммы

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \dots$$

Если существует конечный предел $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ последовательности частичных сумм ряда, то этот предел называют **суммой ряда** и говорят, что ряд **сходится**. Записывают: $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует или $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, то ряд называют **расходящимся**. Такой ряд суммы не имеет.

Знакоположительным рядом называется ряд с неотрицательными членами (знакоотрицательный ряд переходит в знакоположительный путём умножения его на (-1) , что не влияет на сходимость ряда).

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \dots + \frac{n!}{n^n} + \dots$$

Решение. Для этого ряда $U_n = \frac{n!}{n^n}$. Используем признак Даламбера сходимости рядов с положительными членами:

Если конечный или бесконечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

$$U_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Найдем отношение $\frac{U_{n+1}}{U_n}$:

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{1 \cdot 2 \dots n \cdot (n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{n^n}{(n+1) \cdot (n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n.$$

Здесь использовано определение $n!$ (n -факториал): $n! = 1 \cdot 2 \dots n$.

Зная, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = e$, вычислим

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e}$$

Так как $l = \frac{1}{e} < 1$, то ряд сходится.

2) Знакопеременные ряды. Знакопеременные ряды

Знакопеременным рядом называется ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n,$$

где $u_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (т.е. ряд, положительные и отрицательные члены которого следуют друг за другом поочередно).

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, содержащий бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных членов, называется **знакопеременным**.

Знакопеременный ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

Знакопеременный ряд называется **абсолютно сходящимся**, если ряд, составленный из модулей его членов, сходится.

Знакопеременный ряд называется **условно сходящимся**, если сам он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{\ln n} + \dots$$

Решение. По теореме Лейбница ряд сходится, если выполнены два условия:

1) $U_n > U_{n+1}$;

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$.

Проверим, выполнены ли эти условия для нашего ряда:

$$U_n = \frac{1}{\ln n}; \quad U_{n+1} = \frac{1}{\ln(n+1)};$$

$$\ln n < \ln(n+1) \Rightarrow \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Первое условие выполнено.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Второе условие выполнено, следовательно, ряд сходится.

Проверим, есть ли абсолютная сходимость, т. е. сходится ли ряд.

$$\sum_{n=2}^{\infty} |U_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{1}{\ln n} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} + \dots + \frac{1}{\ln n} + \dots$$

Используем признак сравнения сходимости рядов с положительными членами и сравним наш ряд с гармоническим рядом $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$, который расходится.

$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \Rightarrow$ ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ тоже расходится и, следовательно, исходный ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ сходится условно.

4. Функциональные ряды

Степенные ряды

Ряд, членами которого являются функции от x , называется функциональным:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

Придавая x определённое значение x_0 , мы получим числовой ряд

$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots$, который может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Если полученный числовой ряд сходится, то точка x_0 называется **точкой сходимости** ряда; если же ряд расходится – **точкой расходимости** функционального ряда.

Совокупность числовых значений аргумента x , при которых функциональный ряд сходится, называется его **областью сходимости**.

Ряд, членами которого являются степенные функции аргумента x , называется **степенным**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Пример 1. Определить интервал сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+n} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \dots + \frac{1}{n+1}x^n + \dots$$

Решение. Коэффициенты ряда $a_n = \frac{1}{1+n}$; $a_{n+1} = \frac{1}{n+2}$.

Ищем радиус сходимости:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n+2}{1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

Следовательно, ряд сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$.

Исследуем отдельно точки $x = \pm 1$.

1) $x = 1$. В этой точке ряд равен

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n}{1+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} + \dots$$

Используем интегральный признак сходимости. Заменяем $n \rightarrow x$. Тогда

$$U(x) = \frac{1}{1+x}, \quad \int_1^{\infty} U(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) \Big|_1^{\infty} = \infty, \text{ ряд расходится.}$$

2) $x = -1$. В этой точке ряд равен

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{1+n} + \dots, \text{ т. е. ряд знакочередующийся. По}$$

теореме Лейбница он сходится, действительно, здесь

$$U_n = \frac{1}{1+n}; \quad U_{n+1} = \frac{1}{1+(1+n)} = \frac{1}{2+n}.$$

$$1) \frac{1}{1+n} > \frac{1}{2+n}, \text{ т. е. } U_n > U_{n+1}.$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n} = 0.$$

Ряд сходится. Интервал сходимости $-1 \leq x < 1$ или $x \in [-1, 1)$.

Контрольная работа № 4

1. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка

№	Уравнение	№	Уравнение
1.01	$y' - \frac{y}{x+3} = x+3.$	1.11	$y' + 3y = \left(3 + \frac{2}{x}\right)e^{-3x}.$
1.02	$xy' - y = 3x \cos^2 \frac{y}{x}.$	1.12	$3x^2 y' = y^2 + 3xy + 4x^2.$
1.03	$y' + y = \left(1 + \frac{3}{x}\right)e^{-x}.$	1.13	$y' + 3y \operatorname{tg} 3x = \frac{2 \cos 3x}{\sin^2 2x}.$
1.04	$x^2 y' = y^2 + xy + 9x^2.$	1.14	$2xy' = 2y + \sqrt{9x^2 - y^2}.$
1.05	$y' + y \operatorname{tg} x = \frac{3 \cos x}{\sin^2 3x}.$	1.15	$y' - \frac{y}{x+2} = 5(x+2).$
1.06	$3xy' = 3y + \sqrt{x^2 - y^2}.$	1.16	$5xy' - 5y = 2x \cos^2 \frac{5y}{x}.$
1.07	$y' - \frac{y}{x+2} = 3(x+2).$	1.17	$y' + 5y = \left(5 + \frac{2}{x}\right)e^{-5x}.$
1.08	$3xy' - 3y = 2x \cos^2 \frac{3y}{x}.$	1.18	$5x^2 y' = y^2 + 5xy + 4x^2.$
1.09	$y' + 5y \operatorname{tg} 5x = \frac{2 \cos 5x}{\sin^2 2x}.$	1.19	$y' - \frac{y}{x+5} = 3(x+5).$
1.10	$2xy' = 2y + \sqrt{25x^2 - y^2}.$	1.20	$3xy' - 3y = 5x \cos^2 \frac{3y}{x}.$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее данным начальным условиям

№		№	
2.01	$y'' = 5 \cdot y' \cdot \operatorname{ctg} 5x;$ $y_0 _{x_0=\pi/10} = 12; \quad y'_0 _{x_0=\pi/10} = 35$	2.11	$y'' + 4 \cdot y' \cdot \operatorname{tg} 4x = 0;$ $y_0 _{x_0=\pi/4} = 5; \quad y'_0 _{x_0=\pi/4} = 4$
2.02	$y'' + 7 \cdot y' \cdot \operatorname{tg} 7x = 0;$ $y_0 _{x_0=\pi/7} = 4; \quad y'_0 _{x_0=\pi/7} = 7$	2.12	$y'' = 7 \cdot y' \cdot \operatorname{c} \operatorname{tg} 7x;$ $y_0 _{x_0=\pi/14} = 9; \quad y'_0 _{x_0=\pi/14} = 14$
2.03	$y'' = 4 \cdot y' \cdot \operatorname{c} \operatorname{tg} 4x;$ $y_0 _{x_0=\pi/8} = 9; \quad y'_0 _{x_0=\pi/8} = 20$	2.13	$y'' + 5 \cdot y' \cdot \operatorname{tg} 5x = 0;$ $y_0 _{x_0=\pi/5} = 2; \quad y'_0 _{x_0=\pi/5} = 5$

Окончание таблицы

№		№	
2.04	$y'' + 6 \cdot y' \cdot \operatorname{tg} 6x = 0;$ $y_0 _{x_0=\pi/6} = 4; \quad y'_0 _{x_0=\pi/6} = 6$	2.14	$y'' = 3 \cdot y' \cdot \operatorname{ctg} 3x;$ $y_0 _{x_0=\pi/6} = 10; \quad y'_0 _{x_0=\pi/6} = 21$
2.05	$y'' = 3 \cdot y' \cdot \operatorname{ctg} 3x;$ $y_0 _{x_0=\pi/6} = 7; \quad y'_0 _{x_0=\pi/6} = 12$	2.15	$y'' + 8 \cdot y' \cdot \operatorname{tg} 8x = 0;$ $y_0 _{x_0=\pi/8} = 5; \quad y'_0 _{x_0=\pi/8} = 8$
2.06	$y'' + 9 \cdot y' \cdot \operatorname{tg} 9x = 0;$ $y_0 _{x_0=\pi/9} = 2; \quad y'_0 _{x_0=\pi/9} = 9$	2.16	$y'' = 4 \cdot y' \cdot \operatorname{ctg} 4x;$ $y_0 _{x_0=\pi/8} = 11; \quad y'_0 _{x_0=\pi/8} = 28$
2.07	$y'' = 2 \cdot y' \cdot \operatorname{ctg} 2x;$ $y_0 _{x_0=\pi/4} = 11; \quad y'_0 _{x_0=\pi/4} = 18$	2.17	$y'' + 2 \cdot y' \cdot \operatorname{tg} 2x = 0;$ $y_0 _{x_0=\pi/2} = 4; \quad y'_0 _{x_0=\pi/2} = 2$
2.08	$y'' + 3 \cdot y' \cdot \operatorname{tg} 3x = 0;$ $y_0 _{x_0=\pi/3} = 7; \quad y'_0 _{x_0=\pi/3} = 3$	2.18	$y'' = 8 \cdot y' \cdot \operatorname{ctg} 8x;$ $y_0 _{x_0=\pi/16} = 13; \quad y'_0 _{x_0=\pi/16} = 40$
2.09	$y'' = 7 \cdot y' \cdot \operatorname{ctg} 7x;$ $y_0 _{x_0=\pi/14} = 10; \quad y'_0 _{x_0=\pi/14} = 21$	2.19	$y'' + 3 \cdot y' \cdot \operatorname{tg} 3x = 0;$ $y_0 _{x_0=\pi/3} = 5; \quad y'_0 _{x_0=\pi/3} = 3$
2.10	$y'' + 4 \cdot y' \cdot \operatorname{tg} 4x = 0;$ $y_0 _{x_0=\pi/4} = 8; \quad y'_0 _{x_0=\pi/4} = 4$	2.20	$y'' = 9 \cdot y' \cdot \operatorname{ctg} 9x;$ $y_0 _{x_0=\pi/18} = 12; \quad y'_0 _{x_0=\pi/18} = 27$

3. Найти интервал и радиус сходимости степенного ряда

№		№	
3.01	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5^k \cdot x^k}{k^2}$	3.11	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{2^k \cdot k^5}$
3.02	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{4^k \cdot k^{\frac{1}{5}}}$	3.12	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5^k \cdot x^k}{k^{\frac{1}{4}}}$
3.03	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{7^k \cdot k^3}$	3.13	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k \cdot x^k}{k^7}$
3.04	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k}{k^{\frac{1}{4}}} \cdot x^k$	3.14	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{4^k \cdot k^{\frac{1}{3}}}$

3.05	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{6^k \cdot x^k}{k^5}$	3.15	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{5^k \cdot k^6}$
3.06	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{7^k \cdot k^{\frac{1}{2}}}$	3.16	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k^{\frac{1}{7}}} \cdot x^k$
3.07	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{7^k \cdot k^4}$	3.17	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4^k \cdot x^k}{k^7}$
3.08	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{k^{\frac{1}{3}}} \cdot x^k$	3.18	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{3^k \cdot k^{\frac{1}{2}}}$
3.09	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{6^k \cdot x^k}{k^2}$	3.19	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{2^k \cdot k^6}$
3.10	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{3^k \cdot k^{\frac{1}{5}}}$	3.20	$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5^k}{k^{\frac{1}{3}}} \cdot x^k$

ЛИТЕРАТУРА

1. Высшая математика для экономистов [Электронный ресурс]: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям/ Н.Ш. Кремер [и др.].— Электрон. текстовые данные.— М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2017.— 481 с.— Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/74953.html>.— ЭБС «IPRbooks»

2. Задачи и упражнения по математическому анализу и дифференциальным уравнениям: учебное пособие / В. В. Власов, С. И. Митрохин, А. В. Прошкина [и др.]. — Москва, Саратов: Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), Вузовское образование, 2017. — 376 с. — ISBN 978-5-4487-0077-4. — Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/67393.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей.

3. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть; под редакцией А. П. Рябушко. — Минск: Вышэйшая школа, 2014. — 397 с. — ISBN 978-985-06-2466-6. — Текст: электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. — URL: <http://www.iprbookshop.ru/35481.html>. — Режим доступа: для авторизир. пользователей.

4. Математика. Контрольные работы 3 [Электронный ресурс]: методические указания / Сост. Осипова Э.Н., Король Л.И. — СПб.: СПбГУПТД, 2018.— 26 с.— Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_ext_inf_publish.php?id=2018294, по паролю.

5. Математика. Контрольные работы 4 [Электронный ресурс]: методические указания / Сост. Осипова Э.Н., Король Л.И. — СПб.: СПбГУПТД, 2018.— 17 с.— Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_ext_inf_publish.php?id=2018293, по паролю.