

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«Санкт-Петербургский государственный университет
промышленных технологий и дизайна»**

О. М. Иванов Н. С. Цыбизова

**ВВЕДЕНИЕ В ОПТИМИЗАЦИЮ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

Утверждено Редакционно-издательским советом
университета в качестве практикума

Санкт-Петербург
2022

УДК 519.873(076)

ББК 22.18я7

И20

Рецензент:

доктор технических наук, профессор Санкт-Петербургского государственного
университета промышленных технологий и дизайна

А. В. Труевцев

Иванов, О. М.

И20 Введение в оптимизацию технологических процессов: практикум /
О. М. Иванов, Н. С. Цыбизова. – Санкт-Петербург: ФГБОУВО «СПбГУПТД»,
2022. – 39 с.
ISBN 978-5-7937-2176-9

Предназначен для студентов, обучающихся по направлению 29.03.02 – Техно-
логии и проектирование текстильных изделий.

УДК 519.873(076)

ББК 22.18я7

ISBN 978-5-7937-2176-9

© ФГБОУВО «СПбГУПТД», 2022

© Иванов О. М., 2022

© Цыбизова Н. С., 2022

ВВЕДЕНИЕ

Разработка технологических процессов и современного оборудования для производства новых видов текстильных материалов требует не только общеинженерных и специальных знаний, но и умения сначала спланировать, поставить и провести эксперимент, а затем, получив математическую модель технологического процесса, выбрать оптимальные условия его реализации.

Цель преподавания дисциплины заключается в освоении основных принципов решения задач, связанных с определением наилучших условий осуществления технологического процесса исходя из математических моделей, полученных по итогам проведенных исследований. Дисциплина базируется на изучении способов выбора таких значений факторов, которые обеспечат оптимальное значение выбранного критерия. Студенты должны освоить математические методы анализа моделей технологических процессов, позволяющих находить условия достижения экстремальных значений целевой функции, при условии выполнения ограничений задачи. Методические указания включают примеры решения оптимизационных задач различными способами.

Назначение курса – научить студентов применению современных компьютерных методов для выбора оптимальных условий производства различных материалов с учетом существующих ограничений задачи.

Объем курса охватывает материал, который сообщается студентам на лекциях, практических занятиях и консультациях, изучается самостоятельно в процессе работы с учебной литературой, в том числе и специальной по технологии прядения, технологии ткачества и нетканых материалов.

СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ. НАИМЕНОВАНИЕ ТЕМ И ИХ СОДЕРЖАНИЕ

Тема 1. Понятие о задачах оптимизации. Объекты оптимизации. Основные понятия задач оптимизации. Управляемые переменные. Ограничения задачи. Целевая функция и критерий оптимизации. Области допустимых решений. Оптимальное решение.

Тема 2. Аналитические методы оптимизации функции одной переменной.

Практическая работа 1. Решение задачи оптимизации аналитическим методом.

Тема 3. Численные методы поиска экстремумов функции одной переменной. Метод равномерного поиска. Метод сканирования. Метод поразрядного приближения.

Практическая работа 2. Поиск оптимального решения методом поразрядного приближения.

Тема 4. Метод дихотомии для поиска экстремума функции одной переменной. Алгоритм его реализации. Применение метода дихотомии для построения программы расчета.

Практическая работа 3. Применение метода дихотомии для решения задачи оптимизации с использованием предложенной модели.

Тема 5. Поиск корней уравнения при решении задач оптимизации. Численные методы поиска корней уравнения.

Практическая работа 4. Применение метода деления отрезка пополам для поиска корней уравнения при решении задачи оптимизации.

Тема 6. Аналитические методы безусловной оптимизации функции нескольких переменных. Безусловная оптимизация квадратичных многомерных целевых функций.

Практическая работа 5. Поиск оптимального решения для функции 3-х переменных аналитическим методом.

Тема 7. Поиск экстремумов для квадратичных регрессионных моделей нескольких переменных. Матрица Гессе. Использование критерия Сильвестра для поиска экстремумов.

Практическая работа 6. Решение задачи оптимизации с использованием критерия Сильвестра.

Тема 8. Методы линейного программирования при решении многомерных задач оптимизации. Решение задач о минимальной стоимости смеси волокон. Оптимизация плана производства.

Практическая работа 7. Решение задачи оптимизации о долевого составе смеси методом линейного программирования.

Практическая работа 8. Выбор оптимального плана производства текстильных материалов.

Тема 9. Геометрический метод решения задач линейного программирования.

Практическая работа 9. Решение задачи оптимизации состава смеси геометрическим методом.

Практическая работа 10. Выбор оптимального плана производства текстильной продукции.

Тема 10. Диссоциативно-шаговый метод поиска оптимального решения.

Практическая работа 11. Применение диссоциативно-шагового метода для поиска оптимального решения.

Тема 11. Многокритериальные задачи оптимизации. Способы выбора комплексных критериев оптимизации.

Практическая работа 12. Решение задачи оптимизации на основе выбора комплексного критерия оптимизации и сравнение с решением задачи по частным критериям.

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

В соответствии с учебным планом по курсу «Введение в оптимизацию технологических процессов» студенты выполняют практические работы. Необходимые исходные данные для выполнения задания студенты получают у преподавателя. Выполнение всех практических работ является необходимым предварительным условием для получения допуска к экзамену по данному курсу.

Для выполнения практической работы обучающемуся, прежде всего, необходимо уяснить, что требуется в данном конкретном задании, изучить соответствующий материал и провести необходимые расчеты.

При использовании в задании формул, коэффициентов, критериев и значений отдельных параметров, заимствованных из литературы, следует в конце работы поместить список использованных источников. В соответствующих местах работы обязательно давать ссылки на эти источники в квадратных скобках. Все входящие в формулы или таблицы величины должны быть пояснены, указаны их наименования и размерность.

Обязательно необходимо указывать размерность полученного результата. Содержание отчета по практической работе должно показать, что студент ясно представляет себе существо вопроса.

Выполняемые расчеты необходимо пояснять и комментировать, а после их завершения сделать необходимые выводы.

Содержание отчета должно показать, что студент ясно представляет себе существо используемого метода.

Качество выполненной работы оценивается по полноте и правильности выполнения, степени использования научно-технической литературы и форме изложения.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Для оптимизации любых технологических процессов, прежде всего, необходимо определиться с терминологией, используемой при постановке и решении подобных задач [1], [2], [13].

Управляемые переменные: $x_1, x_2, \dots, x_n$ – переменные задачи, значения которых можно выбирать в технологически определенном диапазоне и тем самым влиять на ход процесса. В качестве управляемых переменных могут использоваться, например, доля волокон в смеси, температура сушки материала, время флокирования, скорости вращения рабочих органов машин, частота прокалывания иглопробивного материала, величина крутки пряжи и т. п.

Неуправляемые параметры: $a_1, a_2, \dots, a_n$ – неизменные параметры процесса, значения которых известны. К ним могут относиться геометрические и статистические характеристики используемых волокон, диаметры цилиндров кольцевой прядильной машины, скорость подачи ворса при флокировании, поверхностная плотность материала и т. п.

Неопределенные факторы: факторы, значения которых неизвестны и по которым нет информации, позволяющей выбрать их значение. Это может быть

информация об объеме сбыта новой продукции, ориентация ворса на флокированном материале и т. п.

Целевая функция оптимизационной задачи: количественная мера эффективности технологического процесса. Часто целевую функцию называют *критерием оптимизации*. Фактически это модель, описывающая технологический процесс, и если эта модель адекватно его описывает, то и результаты оптимизации дадут реальный результат на практике, а если описание не точное или не верное, то и результаты оптимизации окажутся либо очень приблизительными, либо не верными. В качестве такого критерия могут выступать, например, скорость выпуска продукции, величина одного из показателей качества продукции или ее себестоимость. Иногда формируют комплексный критерий, включающий несколько частных критериев, который более полно отражает эффективность технологического процесса. Целевой функцией может быть и прибыль, получаемая предприятием, и эффективность использования производственных площадей.

Во всех случаях при решении таких задач критерий оптимизации может быть только один, чтобы достичь его экстремума (max или min).

Критерий оптимизации должен удовлетворять следующим требованиям:

- оценивать эффективность исследуемого объекта или процесса;
- быть количественно измеримым;
- быть эффективным в статистическом смысле, т. е. обладать малой дисперсией и, следовательно, определяться с достаточной точностью без больших затрат времени;
- обеспечивать достаточную полноту описания объекта;
- иметь простую форму и определенный физический смысл.

Ограничения задачи оптимизации: совокупность условий (равенств и неравенств), связывающих характеристики технологического процесса и ограничивающих область изменения управляемых переменных. Такими ограничениями могут выступать: диапазон изменения управляемых переменных, объем сырьевых компонентов на складе, напряжение на электродах флокатора, допустимая температура сушки материала, прочность получаемого материала и т. п.

Математическая модель для оптимизации технологического процесса: целевая функция и совокупность ограничений, зависящих от управляемых переменных, неуправляемых параметров и неопределенных факторов.

Таковыми моделями можно считать, например, модели А. Н. Соловьева и К. И. Корицкого для описания свойств получаемой пряжи, модели процессов получения иглопробивного нетканого материала и электрофлокирования.

Задача оптимизации состоит: в поиске такой комбинации управляемых переменных, которая обеспечивает наибольшую эффективность технологического процесса, т. е. максимальное или минимальное значение целевой функции.

Допустимое решение: набор значений управляемых переменных, который удовлетворяет одновременно всем ограничениям задачи.

Оптимальное решение: набор значений управляемых переменных из области допустимых решений, который дает экстремальное значение целевой функции.

Решение оптимизационной задачи обычно включает следующие этапы:

- выбор критерия оптимизации;
- выбор факторов (переменных), которые влияют на величину критерия оптимизации и диапазон их изменения;
- получение математической модели, описывающей процесс и позволяющей рассчитать значение критерия при любом соотношении переменных;
- определение комплекса ограничений в виде неравенств;
- выбор математического метода решения поставленной задачи (поиска экстремума);
- решение оптимизационной задачи, выбранным методом;
- анализ полученных результатов.

В общем виде задача оптимизации может быть поставлена следующим образом:

$$\begin{aligned} Y &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{opt}(\max, \min, \text{const}) \\ Z_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \diamond A_1; \\ Z_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \diamond A_2; \\ Z_m &= \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \diamond A_m; \end{aligned} \quad (1)$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – управляемые переменные;

$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – целевая функция;

$Z_j = \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – функция ограничения ($j = 1, 2, \dots, m$);

$A_1, A_2, \dots, A_m$ – значения ограничений;

$\diamond$ – знак «>», «<», «≤», «≥», «=».

Сложность оптимизации технологических процессов связана не с математическими методами, которые разработаны достаточно хорошо, а с тем, что в большинстве случаев отсутствует качественная математическая модель процесса. Целевая функция или критерий оптимизации и ограничения задачи оптимизации могут являться зависимостями любого вида, в частности квадратичными уравнениями регрессии или степенными зависимостями, построенными по результатам пассивного или активного экспериментов. Следует иметь в виду, что как целевая функция, так и ограничения задачи могут представлять собой сложный алгоритм вычисления. Поэтому большинство современных задач оптимизации технологических процессов решаются численными методами с применением компьютеров.

Таким образом, оптимизировать можно только тот технологический процесс, который описан математической моделью или алгоритмом расчетов. Поэтому в следующем разделе мы кратко рассмотрим несколько вариантов создания математических моделей технологических процессов.

2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Если в задаче оптимизации не наложены ограничения на диапазон изменения переменной, то задача является задачей безусловной оптимизации. Методы решения таких задач используются также и для поиска экстремумов многомерных функций. Способы поиска экстремумов, когда целевая функция известна, а границы изменения переменной включают всю числовую ось, излагаются в курсе математики.

Суть метода заключается в следующем:

- если первая производная в точке x_0 равна 0: $f'(x_0) = 0$, а вторая производная в этой точке $f''(x_0) > 0$, то в ней достигается минимум функции;
- если первая производная в точке x_0 равна 0: $f'(x_0) = 0$, а вторая производная $f''(x_0) < 0$, то в ней достигается максимум функции.

Анализ функции заключается в том, что находят все максимумы или минимумы функции (в зависимости от требований оптимальности) и выбирают глобальный.

При оптимизации технологических процессов диапазон изменения управляемой переменной всегда ограничен. Поэтому необходимо проверить положение экстремума: находится ли он в этом диапазоне. Если нет, то оптимальное значение переменной, соответствующее реальному технологическому процессу, будет находиться на границе диапазона. Такое оптимальное значение, с математической точки зрения, экстремумом не является.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1

Решение задачи оптимизации аналитическим методом

Рассмотрим аналитический метод на примере технологии получения нетканых материалов способом иглопрокалывания.

Постановка задачи

В процессе исследования влияния плотности прокалывания на разрывную нагрузку материала была получена эмпирическая зависимость, которая в кодированных переменных выглядит следующим образом:

$$P = -3,2X^2 + 4,48X + 21,4.$$

Диапазон изменения плотности прокалывания в натуральном выражении от $N = 80 \text{ 1/см}^2$ ($X = -1$) до $N = 120 \text{ 1/см}^2$ ($X = +1$).

Необходимо определить плотность прокалывания, которая обеспечит максимальную прочность материала. Полученную плотность прокалывания выразить в натуральных значениях переменных.

Решение задачи

Для аналитического определения оптимальной плотности прокалывания, при которой прочность материала будет максимальной, необходимо взять производную от целевой функции, приравнять ее к 0 и вычислить кодированное значение плотности прокалывания X :

$$dP/dX = -6,4 X + 4,48 = 0.$$

Оптимальное значение X будет равно $X = 0,7$.

Теперь необходимо перевести кодированное значение переменной (0,7) в натуральное значение плотности прокалывания:

$$X_n = 100 + 0,7 \cdot 20 = 114 \text{ 1/см}^2. \quad P \approx 23 \text{ сН.}$$

3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. МЕТОД РАВНОМЕРНОГО ПОИСКА. МЕТОД СКАНИРОВАНИЯ. МЕТОД ПОРАЗРЯДНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Во многих случаях поиск экстремума функции аналитическим методом представляет затруднения. Это чаще всего связано не с нахождением производной функции, а с решением полученного уравнения. Оно для многих моделей может оказаться трансцендентным и в этом случае не будет иметь аналитического решения. Тогда решение придется искать численными методами. В общем случае функция $F(x)$ может иметь несколько экстремумов на исследуемом промежутке. Из них главный (оптимальное решение) называется глобальным. Задача поиска экстремумов сводится к их локализации и уточнению значений x и $F(x)$ в точке экстремума.

В дальнейшем для функций одной переменной при изложении методов поиска экстремумов под экстремумом мы будем подразумевать $\max F(x)$. Поскольку максимум функции $F(x)$ соответствует минимуму функции $-F(x)$, то изменив у функции только знак, программой поиска максимума функции можно пользоваться и для поиска минимума.

Будем полагать также, что на изменение x накладываются ограничения в виде неравенств $a \leq x \leq b$, где a и b – границы интервала поиска. В пределах отрезка $[a, b]$ функцию считаем унимодальной, т. е. имеющей на данном промежутке только один максимум.

Теперь рассмотрим несколько простых методов поиска экстремумов.

Метод равномерного поиска

Данный метод основан на том, что переменной x последовательно присваиваются значения $x_1, x_2, x_3, \dots$ с шагом $\Delta x = \text{const}$ и вычисляются значения $F(x)$. Если $F(x_{i+1}) > F(x_i)$ (функция растет), то переменной дается новое приращение. Как только $F(x_{i+1})$ станет меньше $F(x_i)$ (максимум пройден), поиск останавливают.

Существенным недостатком данного метода является то, что при малой заданной погрешности отыскания положения экстремума (высокой точности), он неэкономичен, т. е. может потребовать большого объема вычислений.

Метод сканирования

Способ сканирования отличается от метода равномерного поиска тем, что при прекращении роста функции поиск не останавливают, а проходят весь диапазон изменения переменной. При этом обязательно сохраняют координату найденного максимума, а если обнаруживается другой – больший – координату

заменяют. Это гарантирует нахождение глобального максимума, даже если локальных максимумов в диапазоне изменения переменной несколько. Этот метод, по сравнению с любым другим, требует значительно большего времени, но в реальности это сказывается лишь в случае низкого быстродействия компьютера или очень сложной и требующей большого объема вычислений модели. В подавляющем большинстве случаев модели, описывающие технологические процессы текстильной промышленности, не столь сложны и разница во времени для разных способов поиска экстремумов на современных компьютерах не существенна.

Алгоритм применения метода сканирования

1. Задаем начальное значение функции F_m . Если осуществляется поиск максимума, то начальное значение функции выбирают меньше любого из возможных значений, например 0. Если необходимо искать минимум, то начальное значение больше любого из возможных. (Данный алгоритм ориентирован на поиск максимума). Выбирают шаг изменения управляемой переменной h , где $h = \Delta x = (b - a)/n$, n – число шагов, заданных на интервале.

2. Открываем цикл с диапазоном изменения переменной цикла от 0 до n . В цикле вычисляем значение переменной так, чтобы она изменялась от a до b с шагом h . Вычисляем значение функции $F(x_i)$.

3. Проверяем условие $F(x_i) > F_m$. Если условие выполняется, сохраняем найденное значение: $F_m := F(x_i)$, $x_m := x_i$. Если условие не выполняется, то переходим к следующему значению x_i .

4. После завершения цикла (прохождения всех запланированных значений x_i) в качестве переменных x_m и F_m сохраняются координата максимума и его значение. Распечатываем найденные значения.

С увеличением быстродействия компьютеров сфера применения этого метода ввиду его простоты и надежности возрастает.

Метод поразрядного приближения

Этот метод является вариантом усовершенствования метода равномерного поиска. Он позволяет значительно сократить объем вычислений и реализуется с использованием достаточно простого алгоритма. Его основное отличие от метода равномерного поиска состоит в том, что шаг поиска после каждого этапа сокращается в заданное число раз. Когда величина шага станет меньше, чем требуемая точность вычисления положения экстремума, расчет останавливается. Таким образом, мы находим точку экстремума с любой нужной точностью. Ниже приведен алгоритм реализации данного метода.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 2

Поиск оптимального решения методом поразрядного приближения

Метод поразрядного приближения

1. Задаем начальное приближение $x = x_0$ (обычно это левая граница интервала поиска $x_0 = a$) и вычисляем значение функции в этой точке $F(x_0)$. Задаем $D = h$, где $h = \Delta x$ – начальный шаг поиска.

2. Присваиваем $G = F(x_i)$ (на первом шаге $F(x_i) = F(x_0)$ – значение функции, вычисленное на предыдущем шаге). Вычисляем следующее значение переменной $x := x + D$ и значение функции в этой точке $F = F(x_{i+1})$.

3. Проверяем условие $F > G$. Если условие выполняется, возвращаемся к п. 2, если нет (максимум пройден) – идем к п. 4.

4. Полагаем $D = -D/k$, где k – кратность уменьшения шага по переменной x . Проверяем условие $|D| > E/k$, где E – заданная погрешность вычисления положения экстремума $x_{\max}$. Если условие выполняется – возвращаемся к п. 2, но с шагом противоположного знака и меньшей величины, т. е. ищем максимум в обратном направлении. Если данное условие не выполняется, заканчиваем вычисления и выводим на печать результат: $x_{\max} = x$, $F_{\max} = F(x)$.

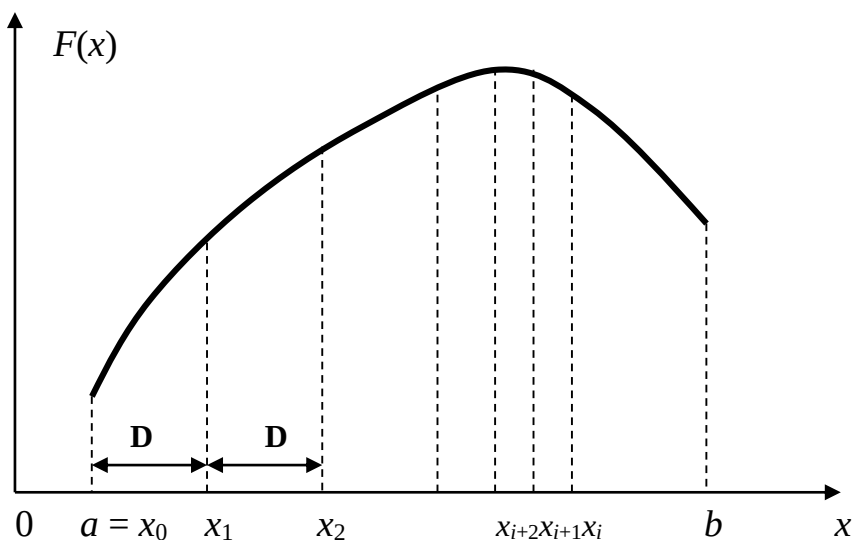


Рис. 1. Схема поиска максимума функции методом поразрядного приближения

4. МЕТОД ДИХОТОМИИ ДЛЯ ПОИСКА ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. АЛГОРИТМ ЕГО РЕАЛИЗАЦИИ. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДИХОТОМИИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПРОГРАММЫ РАСЧЕТА

Метод дихотомии (деления отрезка пополам)

Исходные условия, предполагаемые относительно функции, аналогичны упомянутым выше. Данный метод во многих случаях позволяет сократить объем вычислений даже эффективнее, чем рассмотренный в п. 2.2.

Сущность данного метода заключается в том, что на каждом этапе интервал изменения переменной делят пополам, определяют, в какой части находится экстремум, и отбрасывают ненужную часть. Благодаря этому на каждом шаге величина интервала сокращается в 2 раза, и мы всегда знаем, что экстремум находится в этом интервале. Таким образом, уже за n шагов первоначальный интервал уменьшится в 2^n раз. Например за 10 шагов его размер сократится в $2^{10} = 1024$ раза.

Алгоритм этого метода представлен на *рис. 2* и изложен ниже.

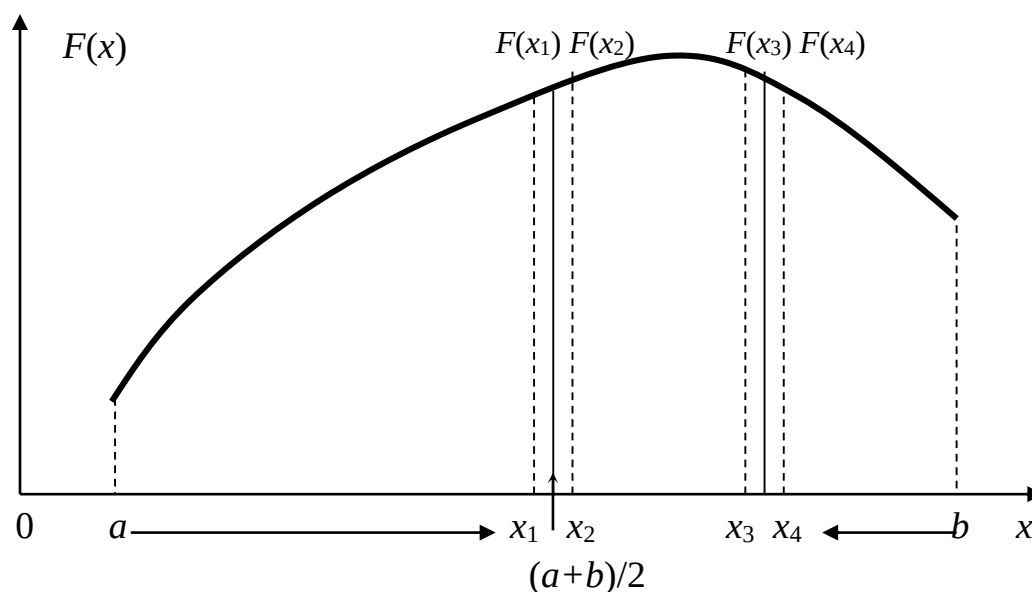


Рис. 2. Схема поиска максимума методом дихотомии (деления отрезка пополам)

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 3

Применение метода дихотомии для решения задачи оптимизации с использованием предложенной модели

1. Проверяем условие $|b - a| < 2E$, где E – заданная погрешность вычисления положения максимума функции $x_{\max}$. Если это условие выполняется, переходим к п. 6, если нет – переходим к следующему п. 2.
2. Делим интервал поиска $[a, b]$ пополам и вычисляем 2 абсциссы, симметрично расположенные относительно его середины с незначительным отклонением: $x_1 = (a + b - E)/2$ и $x_2 = (a + b + E)/2$.
3. Для этих значений x вычисляем $F(x_1)$ и $F(x_2)$.
4. Проверяем условие $F(x_1) > F(x_2)$. Если оно выполняется, то сдвигаем правую границу интервала к его центру $b = x_2$ и переходим к п. 1. Если не выполняется, то переходим к п. 5.
5. Перемещаем левую границу интервала к центру, т. е. $a = x_1$ и возвращаемся к п. 1.
6. Выводим на печать $x_{\max} = (a + b)/2$ и вычисляем $F(x_{\max})$.

5. ПОИСК КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ

К этому разделу относится весьма широкий спектр задач из инженерной практики. Эти задачи непосредственно связаны с задачами оптимизации. В математическом анализе положение экстремума определяют путем поиска

корней уравнения, являющегося производной исходного уравнения. Этот поиск для сложной модели может представлять достаточно сложную задачу, которая не обязательно имеет аналитическое решение. Такую задачу приходится решать численно и для одних задач проще решать прямую задачу – искать экстремум первоначальной функции, а для других – проще искать корень уравнения для производной этой функции.

Решение уравнения $f(x) = 0$ заключается в том, чтобы найти такие значения аргумента x , подстановкой которых оно обращается в тождество. Эти значения независимой переменной называются корнями уравнения.

При отыскании корней уравнения численными методами приходится фактически решать две задачи:

1. Отделение корней, т. е. отыскание интервалов изменения аргумента, в каждом из которых заключается только один корень.
2. Уточнение (вычисление) корней с заданной точностью.

Отделение корней осуществляют либо путем анализа функции на заданном промежутке, либо путем приближенного графического построения зависимости. В основе 1-го способа лежит простое положение: если на концах некоторого интервала непрерывная и монотонная функция принимает различные знаки, то на данном промежутке существует действительный корень уравнения. При решении инженерных задач отделение корней и оценка начального приближения часто производятся из физических соображений.

После определения границ расположения корней численными методами можно вычислить корень с любой степенью приближения к точному значению. Численные методы уточнения корней являются методами последовательных приближений, и решением будет значение, полученное как предел этой последовательности.

Метод деления отрезка пополам

Будем считать, что функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a, b]$ и имеет на этом интервале один действительный корень x_0 . При этом выполняется упомянутое выше условие (рис. 3):

$$f(a) f(b) < 0. \quad (2)$$

1. Разделим интервал $[a, b]$ пополам и вычислим значение функции в середине интервала, т. е. в точке $c = (a + b)/2$. Если $f(c) \neq 0$, т. е. точка “ c ” не является корнем уравнения, то в силу непрерывности функции для одной из половин интервала $[a, b]$ будет выполняться условие (2).

2. Новый интервал выбираем исходя из условия $f(a) f(c) < 0$.

3. Если условие выполняется, то правая граница интервала перемещается в точку “ c ”, т. е. $b = c$. В противном случае в точку “ c ” перемещают левую границу интервала – “ a ”.

4. Обозначив новый интервал: $[a_1, b_1]$, операцию повторяем, т. е. находим середину нового интервала “ c ” и переходим к п. 2.

Продолжая этот процесс, получим систему вложенных интервалов, уменьшающихся в 2 раза с каждым шагом, на концах каждого из которых функция принимает разные знаки, т. е. корень находится внутри интервала. Таким образом, $|b_n - a_n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

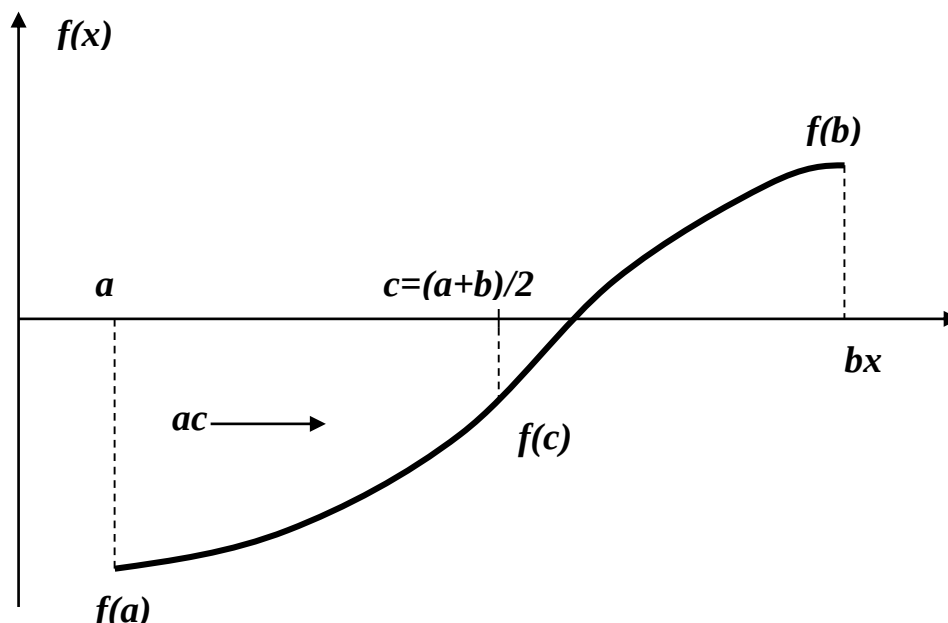


Рис. 3. Схема поиска корня уравнения методом деления отрезка пополам

Процесс вычисления завершается, когда размер интервала станет меньше заданной погрешности определения корня. Корень уравнения считают расположенным в середине последнего интервала.

Метод деления отрезка пополам прост для реализации на компьютере и имеет вполне приемлемую скорость сходимости. Ниже будет показано применение этого метода для решения задачи о «скорости ворса в момент внедрения в клеевой слой», решение которой другим методом было рассмотрено в предыдущем разделе.

Метод секущих

Считаем исходные условия такими же, как и в предыдущем случае. Пусть $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Запишем уравнение прямой, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ (рис. 4).

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Полагая $y = 0$, легко найти точку пересечения этой прямой с осью абсцисс:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a). \quad (3)$$

Это будет первым приближением для корня уравнения. Вычисляя значение $f(x_1)$, принимаем точку $(x_1, f(x_1))$ за новую левую или правую (в зависимости от знака $f(x_1)$) границу сокращающихся интервалов, после чего по формуле (3) повторяем вычисление для следующего приближения корня x_2 и далее для $x_3, x_4, \dots$. Как видно из геометрического построения (рис. 4), последовательность полученных значений x_i имеет своим пределом корень уравнения.

При реализации метода секущих степень приближения последовательных значений к значению корня обычно оценивается выражением $|x_{i+1} - x_i| \leq \varepsilon$, если ε – заданная точность вычислений.

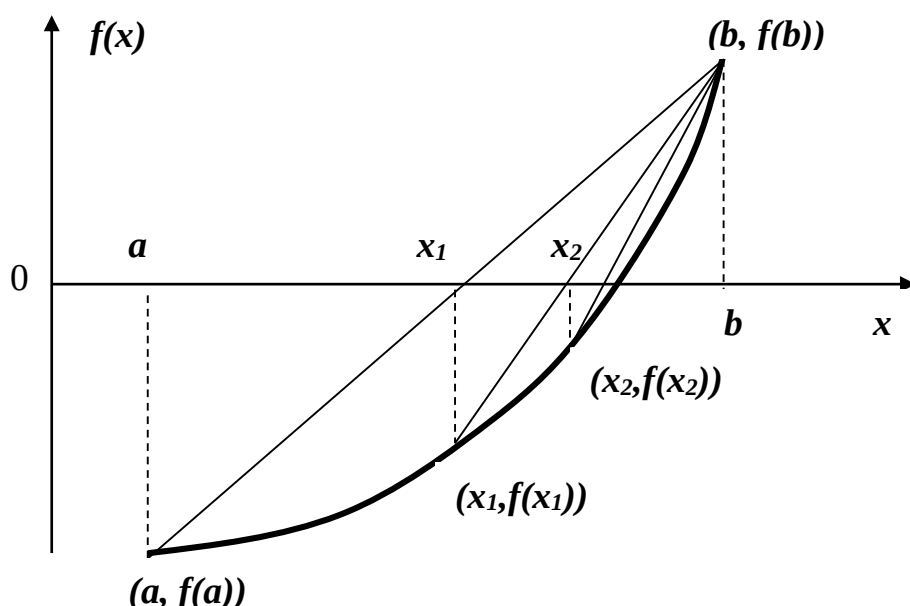


Рис. 4. Схема поиска корня уравнения методом секущих

Метод секущих обладает достаточно быстрой сходимостью в особенности для функций, имеющих небольшую кривизну.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 4

Применение метода деления отрезка пополам для поиска корней уравнения при решении задачи оптимизации

В качестве наглядного примера использования метода воспользуемся задачей о движении заряженного ворса в электрическом поле в процессе формирования ворсового покрытия на текстильных материалах, называемом технология флокирования.

Для применения указанного метода необходимо описать функцию, имеющую корень, т. е. пересекающую ось x , на заданном промежутке. Такой функцией, в рамках указанной модели, может быть выбрана функция $f(t) = z(t) - h$. Вид функции $z(t)$ представлен выражением.

$$z = \int_0^t v d\tau = \frac{\ln(1 + \frac{\beta + 5\alpha}{\beta - 5\alpha} e^{2\alpha \cdot \beta \cdot t})}{\alpha^2} - (5 + \frac{\beta}{\alpha})t - \frac{1}{\alpha^2} \ln(\frac{2\beta}{\beta - 5\alpha}), \quad (4)$$

$$\text{где } \alpha = \sqrt{0,11 \cdot l(d - 9,3 \cdot 10^{-6}) / m}; \quad (5)$$

$$\beta = \sqrt{25\alpha^2 + (\frac{qE}{mg} + 1)g}. \quad (6)$$

Легко показать, что выбранная функция обязательно имеет корень, например, на промежутке времени от 0 до 1 с. При $t = 0 \Rightarrow z = 0$ и, следовательно, $f(t = 0) = -h$. При $t = 1 \Rightarrow z \gg h$ и, следовательно, $f(t) > 0$. Таким образом, выполнено условие наличия корня уравнения на заданном промежутке.

Воспользовавшись методом деления отрезка пополам для функции $f(t)$, описанным выше, легко определить корень этой функции, т. е. момент времени t , когда $z(t) - h = 0$. После этого остается вычислить значение скорости и кинетической энергии.

Алгоритм расчета скорости и кинетической энергии ворсинки в момент ее внедрения в клеевой слой

1. Выбираем начальный момент времени, когда ворсинка гарантированно не долетела до нижнего электрода, например $t0 := 0$, и конечный момент, когда она наверняка пролетела расстояние больше h , например $tk := 1$. Задаем необходимую точность вычислений, например $E := 0,001$.

2. Проверяем условие $|tk - t0| < E$. Если условие выполняется, переходим к п. 4, где вычисляем скорость и энергию ворсинки, а если нет, то переходим к следующему пункту.

3. Вычисляем середину интервала: $ts := (t0 + tk)/2$. Проверяем условие $f(t0)f(ts) < 0$. Для вычисления $f(t) = z(t) - h$ используем соотношения (4), (5), (6). Если условие выполняется, то $tk := ts$, если нет, то $t0 := ts$ и переходим к п. 2.

4. Рассчитываем среднее значение интервала времени. Вычисляем величину скорости и кинетической энергии ворсинки.

6. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. БЕЗУСЛОВНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ КВАДРАТИЧНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Реальные модели технологических процессов описываются, как правило, функциями нескольких переменных. Т. е. критерий оптимизации или целевая функция зависят от ряда факторов технологического процесса, которые могут

включать характеристики сырьевых компонентов, режимы работы оборудования и многое др.

Аналитические методы поиска экстремумов таких функций, а также необходимые и достаточные условия существования экстремумов излагаются в курсе математического анализа. Изложим кратко эти условия для задач безусловной оптимизации [1].

Функция нескольких независимых переменных, например, трех: $F(x_1, x_2, x_3)$ достигает максимума в точке (a_1, a_2, a_3) , если значение $F(a_1, a_2, a_3)$ не меньше всех смежных значений функции

$$\Delta F = F(a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3 + h_3) - F(a_1, a_2, a_3) \leq 0 \quad (7)$$

при всех h_1, h_2, h_3 достаточно малых по абсолютной величине.

Аналогично $F(x_1, x_2, x_3)$ достигает минимума в точке (a_1, a_2, a_3) , если значение $F(a_1, a_2, a_3)$ не больше всех смежных значений функции

$$\Delta F = F(a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3 + h_3) - F(a_1, a_2, a_3) \geq 0. \quad (8)$$

Таким образом, необходимое условие существования экстремума (максимума или минимума) состоит в том, что функция $F(x_1, x_2, x_3)$ может достигать экстремума лишь при тех значениях переменных x_1, x_2, x_3 , при которых частные производные первого порядка $\frac{\partial F(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial F(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2}$ и $\frac{\partial F(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3}$ обращаются в нуль или не существуют.

Кроме того, можно утверждать, по аналогии с функцией одной переменной, что при наличии производных второго порядка необходимым условием максимума являются неравенства

$$\frac{\partial^2 F(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^2} \leq 0, \frac{\partial^2 F(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2^2} \leq 0 \text{ и } \frac{\partial^2 F(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3^2} \leq 0. \quad (9)$$

Необходимым условием минимума будет

$$\frac{\partial^2 F(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^2} \geq 0, \frac{\partial^2 F(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2^2} \geq 0 \text{ и } \frac{\partial^2 F(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3^2} \geq 0. \quad (10)$$

Следовательно, первым этапом нахождения экстремума функции нескольких переменных является решение системы уравнений, которая для рассматриваемых трех переменных имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial F(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\partial F(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} = 0.$$

Обратим внимание на то, что значительное количество моделей технологических процессов являются квадратичными и для них указанная система будет линейной.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 5

Поиск оптимального решения для функции 3-х переменных аналитическим методом

Решение задачи оптимизации аналитическим методом для функции 3-х переменных проведем на примере конкретной задачи.

Пример

Модель характеризует статистическую зависимость целевой функции $Y_1(X_1, X_2, X_3)$ – относительная разрывная нагрузка одиночной нити (сн/Текс), от трех технологических факторов – X_1 , X_2 , X_3 . Фактор X_1 – скорость шляпочного полотна (м/мин), X_2 – частота вращения съемного барабана (мин⁻¹), X_3 – линейная плотность чесальной ленты (кТекс). Представленная модель записана для переменных заданных в кодированном виде.

$$Y_1(X_1, X_2, X_3) = 10.78 - 0.13X_1 + 0.13X_2 + 0.23X_3 - 0.44X_1^2 + 0.08X_1X_2 + 0.19X_1X_3 - 0.13X_2^2 + 0.06X_2X_3 - 0.24X_3^2.$$

Запишем производные от целевой функции по трем переменным.

$$dY_1/dX_1 = -0.13 - 0.88X_1 + 0.08X_2 + 0.19X_3 = 0;$$

$$dY_1/dX_2 = 0.13 + 0.08X_1 - 0.26X_2 + 0.06X_3 = 0;$$

$$dY_1/dX_3 = 0.23 + 0.19X_1 + 0.06X_2 - 0.48X_3 = 0.$$

Решением системы уравнений будет $X_1 = 0.028$; $X_2 = 0.635$; $X_3 = 0.547$.

Определим значения вторых производных.

$$d^2Y_1/dX_1^2 = -0.88; d^2Y_1/dX_2^2 = -0.26; d^2Y_1/dX_3^2 = -0.48.$$

Согласно (9) мы имеем дело с максимумом. Все значения переменных находятся в области их изменения, т. е. от – 1 до + 1.

Задание: необходимо предложить методику решения системы уравнений и проверить полученное решение.

7. ПОИСК ЭКСТРЕМУМОВ ДЛЯ КВАДРАТИЧНЫХ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. МАТРИЦА ГЕССЕ. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КРИТЕРИЯ СИЛЬВЕСТРА ДЛЯ ПОИСКА ЭКСТРЕМУМОВ

Для выявления «посторонних» стационарных точек используют необходимые условия второго порядка, которые формулируются следующим образом: если точка X' соответствует безусловному локальному минимуму дважды дифференцируемой целевой функции $F(X)$, то имеют место равенства (11), а также справедливо условие

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F(X')}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - x'_i)(x_j - x'_j) \geq 0. \quad (12)$$

Это условие означает неотрицательную определенность матрицы Гессе $H(X') = F''(X') = \nabla^2 F(X')$, вычисленной в точке X' .

Достаточное условие локального **минимума** формулируется следующим образом: если точка X' стационарна и имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F(X')}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - x'_i)(x_j - x'_j) > 0, \quad (13)$$

то X' – точка безусловного локального минимума функции $F(X)$.

Необходимым и достаточным условием **максимума** целевой функции $F(X)$ являются $\nabla F(X') = 0$ и отрицательная определенность матрицы Гессе $H(X')$.

Для исследования матрицы Гессе на положительную или отрицательную определенность обычно используют критерий Сильвестра. По этому критерию условием положительной определенности матрицы Гессе $H(X) = [\alpha_{ij}]$ является выполнение n неравенств:

$$\det_1 = a_{11} > 0; \quad \det_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \dots \det_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (14)$$

Условием отрицательной определенности матрицы Гессе является выполнение следующих неравенств:

$$\det_1 < 0; \det_2 > 0; \det_3 < 0 \dots$$

Элементы матрицы Гессе вычисляют как вторые производные целевой функции

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (15)$$

Матрица Гессе для целевой функции от трех управляемых переменных выглядит следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}. \quad (16)$$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 6

Решение задачи оптимизации с использованием критерия Сильвестра

Проведем анализ целевой функции, описывающей технологический процесс, на основе матрицы Гессе и критерия Сильвестра, описанных выше.

Пример

Воспользуемся в качестве примера предыдущей моделью.

Построим матрицу Гессе для целевой функции из работы 5. Воспользуемся для этого выражением (16):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,88 & 0,08 & 0,19 \\ 0,08 & -0,26 & 0,06 \\ 0,19 & 0,06 & -0,48 \end{vmatrix}.$$

Проанализируем матрицу согласно описанному выше методу:

$$det_1 = a_{11} < 0; det_2 = \begin{vmatrix} -0,88 & 0,08 \\ 0,08 & -0,26 \end{vmatrix} = 0,224 > 0; det_3 = -0,1007 < 0.$$

Необходимым и достаточным условием **максимума** целевой функции $F(X)$ являются $\nabla F(X) = 0$ и отрицательная определенность матрицы Гессе.

Условием отрицательной определенности матрицы Гессе является выполнение следующих неравенств:

$$det_1 < 0; det_2 > 0; det_3 < 0 \dots$$

Таким образом, мы доказали, согласно критерию Сильвестра, что в данном случае у нас имеется максимум функции.

8. МЕТОДЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Широкое распространение при оптимизации технологических процессов, описываемых линейными функциями, получили методы линейного программирования. Такие методы позволяют учитывать большое количество управляемых

переменных, решать задачи достаточно простыми и эффективными способами, анализировать влияние параметров модели на полученное решение [1].

Математическая модель подобной задачи в общем виде выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= c_0 + c_1x_1 + \dots + c_nx_n \rightarrow \text{extr}; \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n &\leq b_i, \quad i = 1, \dots, m; \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n &= b_i, \quad i = m + 1, \dots, r; \\ x_{j\min} &\leq x_j \leq x_{j\max}, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (17)$$

Такая модель получается из модели (1) общего вида при условии, когда целевая функция и все ограничения линейны относительно управляемых переменных. Вследствие этого и был назван данный класс оптимизационных задач. Симплекс метод решения подобных задач подробно рассмотрен в учебнике [1] и в данном пособии не рассматривается.

Оптимальное решение должно обеспечивать экстремальное значение (минимальное или максимальное в зависимости от физической сущности целевой функции) критерию F . Ограничения задачи формируют область допустимых решений задачи.

В текстильной промышленности методами линейного программирования решают следующие задачи.

- оптимизация состава смеси волокон по ее стоимости;
- оптимизация состава смеси по неровноте входящих волокон (по длине, разрывной нагрузке, линейной плотности и т. п.);
- определение оптимального ассортимента продукции (пряжи, нитей, нетканых материалов, ткани и т. п.) вырабатываемой фабрикой, цехом и т. д.;
- распределение производства заданного ассортимента продукции на имеющемся оборудовании в целях достижения максимального или минимального значения выбранного критерия (максимальной прибыли, минимального количества отходов и т. п.);
- выбор оптимального пути транспортирования сырья от производителей или продукции к потребителям;
- выбор режима работы оборудования, обеспечивающего оптимальное значение выбранного критерия – максимальная производительность, минимальные потери и т. д.

Рассмотрим ход решения некоторых задач, относящихся к данному классу, и их особенности на конкретных примерах.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 7

Решение задачи оптимизации о долевом составе смеси методом линейного программирования

Выбор оптимального состава смеси

Проиллюстрируем описанный метод на примере задачи о выборе состава смеси, которая является классическим случаем задачи, решаемой методом

линейного программирования. Сначала рассмотрим простой вариант задачи для двух управляемых переменных.

Требуется составить волокнистый холст из волокон хлопка 1-го и 3-го сорта, отвечающий ряду ограничений, приведенных в табл. 1, и имеющий наименьшую себестоимость. Для стоимости волокон в этой и следующей задачах принята, конечно, условная цена.

Т а б л и ц а 1. Исходные данные для смеси волокон

Показатель	Вид волокна хлопка		Предельное значение для смеси
	1-й сорт	3-й сорт	
Длина (L), мм	35	27	32
Засоренность (C), %	2,5	4	3,5
Разрывная нагрузка (P), сН	5,2	3,8	4,2
Стоимость 1 кг (S), руб.	45	32	

По этим данным строят модель оптимизации. Для этого, в первую очередь, необходимо выбрать *управляемые переменные* задачи. Наилучшим образом для данной задачи подходит долевой состав смеси: x_1 – доля волокна 1-го сорта, x_3 – доля волокна 3-го сорта.

Неуправляемыми параметрами будут L_1 , L_3 , L – средняя длина волокон данного сорта и минимально допустимая средняя длина для смеси; C_1 , C_3 , C – засоренность волокон каждого сорта и максимально допустимая засоренность для смеси; P_1 , P_3 , P – средняя прочность для каждого сорта и минимально допустимая средняя прочность в смеси; S_1 , S_3 – стоимость волокон.

Критерием оптимизации в данном случае следует выбрать себестоимость получаемой смеси S .

Модель задачи будет состоять из ряда ограничений в виде неравенств и функции, определяющей критерий оптимизации. Благодаря выбору управляемых переменных, теперь легко сформулировать задачу математически:

$$\begin{aligned} \text{ограничения задачи} \quad & L_1 x_1 + L_3 x_3 \geq L; \\ & C_1 x_1 + C_3 x_3 \leq C; \\ & P_1 x_1 + P_3 x_3 \geq P; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\text{критерий оптимизации} \quad S(x_1, x_3) = S_1 x_1 + S_3 x_3 = \min. \quad (19)$$

Кроме этого всегда следует помнить условие неотрицательности управляемых переменных $x_1 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, хотя в данной конкретной задаче оно выполняется автоматически.

Характер управляемых переменных позволяет использовать при решении задачи еще одно условие:

$$x_1 + x_3 = 1. \quad (20)$$

Гораздо эффективнее для решения таких задач использовать численные методы. Если количество управляемых переменных не превышает 5, на современных компьютерах вполне можно использовать метод сканирования.

Имеющаяся модель задачи позволяет предложить следующий **алгоритм решения**:

1. Выбрать шаг изменения переменных на основе реальной возможности приготовления смеси и в соответствии с ним определить количество шагов, необходимых для перебора всех вариантов.

2. Задать начальное значение переменной x_1 (или x_3).

3. Вычислить значение второй переменной.

4. Проверить последовательно выполнение заданных ограничений задачи.

Если хотя бы одно из неравенств не выполняется, то этот вариант смеси не «подходит» и следует переходить к следующему варианту смеси, т. е. изменить значение переменной на величину выбранного шага и перейти к п. 3, а если все ограничения выполнены, переходим к п. 5.

5. Вычислить стоимость, полученной смеси.

6. Сравнить значение стоимости с ранее вычисленным или начальным значением.

7. Если полученная стоимость меньше предыдущего значения, то необходимо сохранить это значение, а также информацию о долевого составе, соответствующем этой стоимости. Если значение стоимости превышает ранее полученное значение, то его сохранять не имеет смысла и следует перейти к рассмотрению следующего варианта долевого состава смеси, т. е. вновь изменить значение долевого состава на величину шага и возвратиться к п. 3.

8. Распечатать сохраненные значения долевого состава и стоимости смеси.

В результате реализации предложенного алгоритма мы получим с заданной точностью, определяемой величиной шага изменения доли волокон, долевой состав смеси волокон, характеристики которой удовлетворяют всем ограничениям задачи, и при этом стоимость такой смеси будет минимальна.

Решение этой задачи может быть осуществлено и **с помощью программы «Excel»**.

В ячейках для управляемых переменных x_1 и x_3 сначала указывают исходные данные для вычислений, например, $x_1 = 0$, $x_3 = 1 - x_1 = 1$. В ячейке для x_3 вычисляют соответствующее значение на основе тождества (18). В ячейке для стоимости смеси S вычисляют ее величину (19), используя ячейки x_1 , и x_3 . После этого активировав ячейку «стоимости» и воспользовавшись опцией «поиск решения» для поиска минимума с учетом всех ограничений задачи, приведенных выше, включая диапазон изменения управляемых переменных, получают необходимый результат.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 8

Выбор оптимального плана производства текстильных материалов

Рассмотрим еще одну задачу, относящуюся к области линейного программирования. Конкретная формулировка задачи выглядит следующим образом:

1. Фабрика производит нетканые материалы двух артикулов.
2. Для производства объема материала 1-го артикула A_1 (тыс. м²) требуется b_1 (тонн) волокон первого вида (1) и b_2 волокон второго вида (2).
3. Для выпуска объема A_2 (тыс. м²) материала 2-го артикула требуется соответственно c_1 и c_2 (тонн) тех же волокон.
4. На складе фабрики имеется запас волокон 1 в объеме Z_1 (тонн) и волокон 2 в объеме Z_2 (тонн).
5. По существующим контрактам фабрика должна произвести p_1 (тыс. м²) материала 1-го артикула и p_2 материала 2-го артикула.
6. Прибыль фабрики от реализации объема A_1 (тыс. м²) материала 1-го артикула составляет s_1 (тыс. руб.), а от реализации объема A_2 материала 2-го артикула – s_2 (тыс. руб.).

Считая, что вся продукция будет реализована, определить оптимальный план производства материалов, обеспечивающий получение наибольшей прибыли.

Для решения поставленной задачи сначала необходимо построить модель ситуации. В качестве управляемых переменных выберем: количество выпускаемого материала (тыс. м²) 1-го артикула x_1 и 2-го артикула – x_2 . Целевой функцией данной задачи является прибыль от реализации выпускаемых фабрикой материалов.

Запишем математически сформулированные ограничения задачи.

1. При выпуске материалов расход сырьевых компонентов не может превышать их количества на складе фабрики. Расход волокон 1 при выпуске материалов обоих артикулов в объемах x_1 и x_2 должен подчиняться следующему неравенству:

$$\frac{b_1}{A_1} \left(\frac{T}{\text{тыс. м}^2} \right) x_1 (\text{тыс. м}^2) + \frac{c_1}{A_2} \left(\frac{T}{\text{тыс. м}^2} \right) x_2 (\text{тыс. м}^2) \leq Z_1(T). \quad (21)$$

Для волокон второго вида:

$$\frac{b_2}{A_1} \left(\frac{T}{\text{тыс. м}^2} \right) x_1 (\text{тыс. м}^2) + \frac{c_2}{A_2} \left(\frac{T}{\text{тыс. м}^2} \right) x_2 (\text{тыс. м}^2) \leq Z_2(T). \quad (22)$$

2. Необходимость выполнения заключенных контрактов формулируется следующим образом:

$$x_1 \geq p_1; \quad x_2 \geq p_2. \quad (23)$$

Здесь нет необходимости использовать условие неотрицательности переменных, так как предыдущие неравенства это гарантируют.

Теперь запишем целевую функцию, т. е. прибыль, получаемую фабрикой от реализации выпускаемой продукции в объемах x_1 и x_2 .

$$S(x_1, x_2) = \frac{s_1}{A_1} \left(\frac{\text{тыс. руб.}}{\text{тыс. м}^2} \right) x_1 (\text{тыс. м}^2) + \frac{s_2}{A_2} \left(\frac{\text{тыс. руб.}}{\text{тыс. м}^2} \right) x_2 (\text{тыс. м}^2). \quad (24)$$

Представленные соотношения образуют оптимизационную математическую модель задачи. Цель: найти такие x_1 и x_2 , которые удовлетворяют всем ограничениям задачи одновременно и при этом дают функции прибыли максимальное значение среди всех значений переменных из области допустимых значений.

Алгоритм решения этой задачи аналогичен предыдущему, но с некоторыми отличиями. Это касается, во-первых, того, что сначала необходимо определить область изменения переменных и, во-вторых, переменные в этой задаче независимы, т. е. не связаны друг с другом напрямую, и изменять их следует независимо друг от друга. Определение диапазона изменения переменных проведем на основе нашей модели. Нижние границы для обеих переменных четко определены имеющимися неравенствами. Вычислим верхнюю границу изменения переменной x_1 (для второй переменной вычисление осуществляют аналогично). Подставив в первое неравенство (21) минимальное значение $x_2 = p_2$, легко получить верхнюю границу изменения переменной x_1 . Из второго неравенства таким же образом можно получить другую оценку верхней границы этой же переменной.

$$x_1 \leq \frac{A_1}{b_1} \left(Z_1 - \frac{c_1 p_2}{A_2} \right); \quad x_1 \leq \frac{A_1}{b_2} \left(Z_2 - \frac{c_2 p_2}{A_2} \right). \quad (25)$$

После получения оценок останется выбрать наименьшую из них. Так же определяют верхнюю границу изменения второй переменной x_2 :

$$x_2 \leq \frac{A_2}{c_1} \left(Z_1 - \frac{b_1 p_1}{A_1} \right); \quad x_2 \leq \frac{A_2}{c_2} \left(Z_2 - \frac{b_2 p_1}{A_1} \right). \quad (26)$$

Используем для примера численные значения и размерности исходных данных, перечисленных выше:

$$A_1 = 10; A_2 = 100; b_1 = 1; b_2 = 3; c_1 = 5; c_2 = 6; Z_1 = 80; Z_2 = 150; p_1 = 60; p_2 = 800; s_1 = 1,6; s_2 = 6.$$

Математическая модель задачи для этих данных будет выглядеть следующим образом:

$$0,1 x_1 + 0,05 x_2 \leq 80; \quad 0,3 x_1 + 0,06 x_2 \leq 150; \quad x_1 \geq 60; \quad x_2 \geq 800; \\ S = 0,16x_1 + 0,06x_2. \quad (27)$$

Подобная задача может быть поставлена практически для любого производства, если необходимо определить оптимальный объем выпуска продукции из имеющегося объема сырья. Алгоритм решения задачи будет выглядеть следующим образом.

1. Задаем исходные значения всех параметров задачи: $A_1; A_2; b_1; b_2; c_1; c_2; Z_1; Z_2; p_1; p_2; s_1; s_2$.

2. Вычисляем верхние границы диапазона изменения управляемых переменных (25), (26).

3. Изменяем управляемые переменные с выбранным шагом в диапазоне от минимальных значений ($x_1 = p_1, x_2 = p_2$) до максимальных, вычисленных в предыдущем пункте.

4. Проверяем условия достаточности волокна на складе (21) и (22).

5. Если условия выполнены, то вычисляем целевую функцию и сравниваем с ранее полученным результатом. Если новый результат больше, то сохраняем найденное значение, в противном случае переходим к следующему варианту.

6. Перебрав все варианты, получим «сохраненными» оптимальные результаты. Для контроля рекомендуется вычислить количество волокна каждого вида, оставшегося на складе. Остаток одного из них должен быть близок к нулю.

В табл. 2 показан результат решения данной задачи с использованием программы «Excel».

Т а б л и ц а 2. Результаты решения

x_1	x_2	S									
300,0	1000	108									
A_1	A_2	b_1	b_2	c_1	c_2	Z_1	Z_2	p_1	p_2	s_1	s_2
10	100	1	3	5	6	80	150	60	800	1,6	6

9. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Для геометрической интерпретации задачи линейного программирования необходимо в координатных осях x_1 и x_2 построить прямые, соответствующие граничным значениям неравенств. Это позволит наглядно представить область допустимых значений для переменных. Только в этой области выполняются все ограничения задачи.

После этого в этих же переменных необходимо построить прямую, соответствующую целевой функции задачи. Точка соприкосновения этой прямой с областью допустимых значений будет соответствовать оптимальному решению задачи.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 9

Решение задачи оптимизации состава смеси геометрическим методом

Решим задачу оптимизации долевого состава смеси для случая 3 компонентов смеси. Тогда тождество будет выглядеть следующим образом: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

Задание

Необходимо определить долевой состав смеси из 3-х видов волокон, отвечающую заданным требованиям, себестоимость которой минимальна.

Т а б л и ц а 3. Характеристика волокон

Вид волокна	Влажность, %	Штапельная длина, мм	Коэффициент вариации линейной плотности, %	Коэффициент зрелости	Линейная плотность, мтекс	Разрывная нагрузка, сН	Содержание пороков и сорных примесей, %
	W	l	K_m	Z	T	P_6	Π
1	5,4	40,4	21,1	2	141	4,65	3,1
2	5,7	39,7	22,6	1,9	133	4,4	3,4
3	5,2	38,6	24,7	1,9	125	4,15	3,7

Параметры для смеси волокон должны отвечать следующим требованиям:

$$5,35 < W < 5,5; 39,6 < l; K_m < 22,8; 1,91 < Z; 128 < T < 138; 4,35 < P_6; 32,6 < P_{ov}; \Pi < 3,42.$$

Стоимость волокон (условная): $S_1 = 28 \text{ руб.}$, $S_2 = 21 \text{ руб.}$, $S_3 = 16 \text{ руб.}$

Запишем соотношения, определяющие ограничения для этой задачи, с учетом долевого состава и тождества.

1. $W = 5,4 x_1 + 5,7 x_2 + 5,2(1 - x_1 - x_2) \geq 5,35;$
2. $W = 5,4 x_1 + 5,7 x_2 + 5,2(1 - x_1 - x_2) \leq 5,5;$
3. $L = 40,4 x_1 + 39,7 x_2 + 38,6(1 - x_1 - x_2) \geq 39,6;$
4. $C = 21,1 x_1 + 22,6 x_2 + 24,7(1 - x_1 - x_2) \leq 22,8;$
5. $T = 141 x_1 + 133 x_2 + 125(1 - x_1 - x_2) \geq 128;$
6. $T = 141 x_1 + 133 x_2 + 125(1 - x_1 - x_2) \leq 138;$
7. $P_6 = 4,65x_1 + 4,4x_2 + 4,15(1 - x_1 - x_2) \geq 4,35;$
8. $\Pi = 3,1x_1 + 3,4x_2 + 3,7(1 - x_1 - x_2) \leq 3,42.$

Проведя элементарные преобразования данных неравенств, можно записать неравенства в более простом виде:

$$x_2 \geq 0,3 - 0,4 x_1;$$

$$\begin{aligned}
x_2 &\leq 0,6 - 0,4 x_1; \\
x_2 &\geq 0,909 - 1,636 x_1; \\
x_2 &\geq 0,905 - 1,714 x_1; \\
x_2 &\geq 0,375 - 2x_1; \\
x_2 &\leq 1,625 - 2x_1; \\
x_2 &\geq 0,8 - 2x_1; \\
x_2 &\geq 0,933 - 2x_1.
\end{aligned}$$

На основе полученных неравенств можно на графике $x_2(x_1)$ сформировать область допустимых значений управляемых переменных. Для этого следует построить графики прямых на основе имеющихся неравенств, которые будут являться границами области снизу или сверху в зависимости от знака неравенства. На графике (рис. 5) представлены все имеющиеся границы, причем ограничения «снизу» показаны сплошной линией, а ограничения «сверху» – пунктирной.

Из графика наглядно видно, что значительное количество ограничений фактически не «работает». В качестве реальных ограничений в данном случае выступает 4 из 8. Область допустимых значений представляет собой четырехугольник **ABCD**, включая его границы. В дальнейшем, для большей наглядности при определении положения экстремума мы уберем те прямые, которые ограничениями для данной задачи не являются.

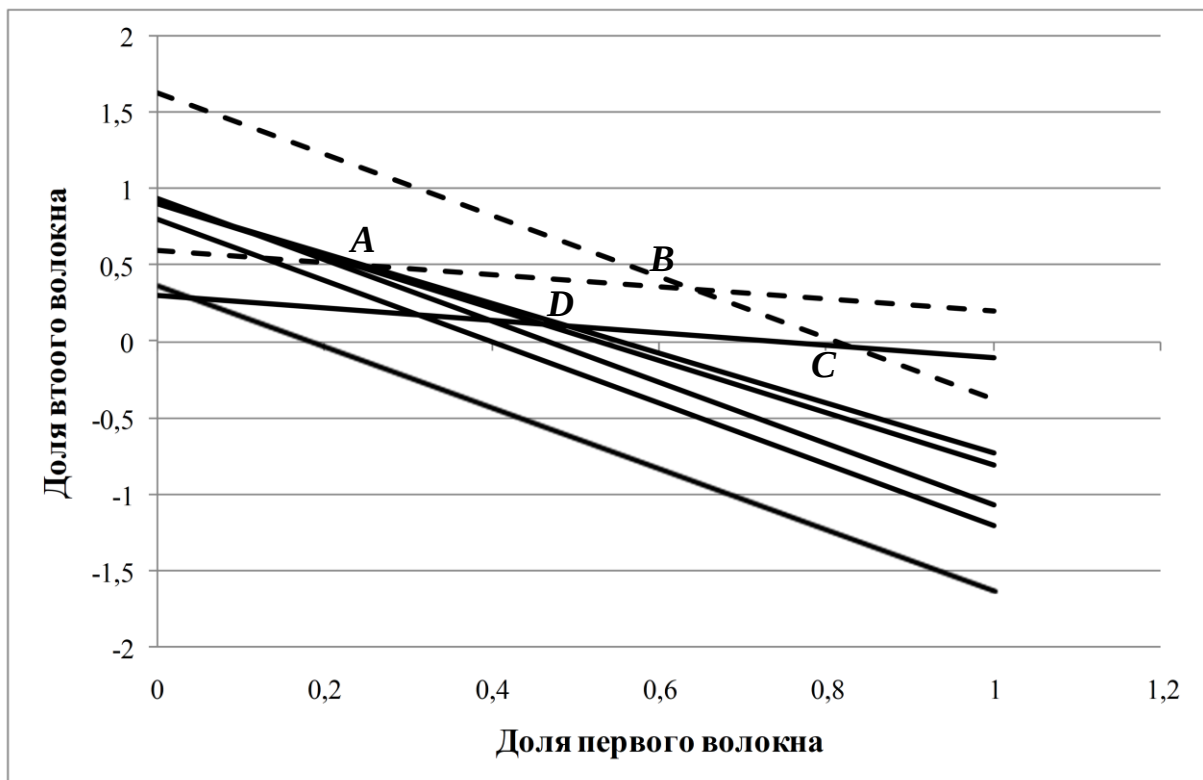


Рис. 5. Область допустимых значений для управляемых переменных

Теперь необходимо определить в какой точке области допустимых значений достигается экстремум, т. е. в данной задаче минимум.

Запишем выражение для стоимости смеси с учетом тождества.

$$S = 28 x_1 + 21 x_2 + 16(1 - x_1 - x_2). \quad (28)$$

Ясно, что стоимость смеси не может превышать 34 руб. Возьмем значение стоимости, например, равной 30 руб. и преобразуем соотношение, как и ранее, к зависимости $x_2(x_1)$:

$$x_2 = 14/5 - 12/5 x_1.$$

Остается нанести полученную прямую на график (рис. 6). Если стоимость S изменяется, то прямая смещается параллельно самой себе (при возрастании стоимости – вверх, при уменьшении – вниз). Следовательно, требуется выбрать такое значение стоимости, чтобы она была минимальной, а прямая касалась области допустимых значений, поскольку оптимальное решение должно принадлежать к этой области. Обе указанных прямых (штрихпунктирные) вместе с областью допустимых значений представлены на рис. 6.

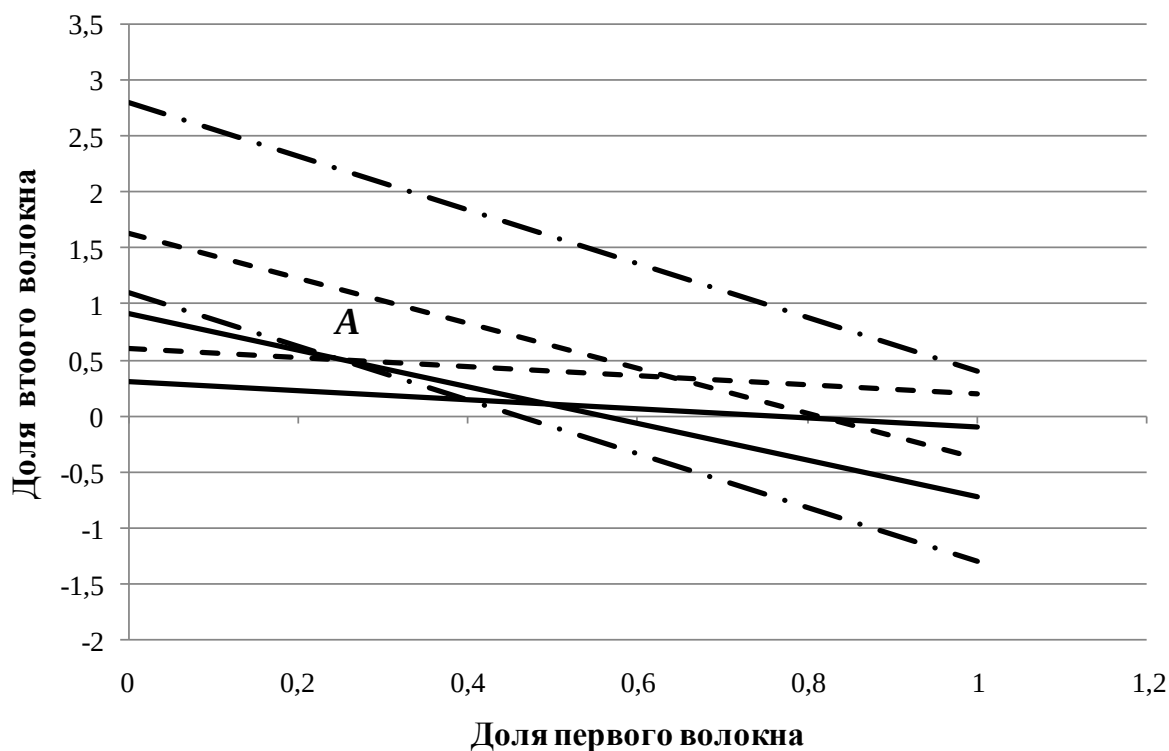


рис. 6. Оценка долевого состава для минимальной стоимости смеси

Таким образом, минимальная стоимость смеси достигается в точке A при следующих значениях управляемых переменных и целевой функции: $x_{1\min} = 0,25$; $x_{2\min} = 0,5$; $x_{3\min} = 0,25$; $S_{\min} = 21,5$.

Геометрическое решение подобных задач весьма наглядно, однако возможно не более чем для 3-х переменных и требует немало времени. Однако из

геометрических представлений можно сделать некоторые выводы без сложных математических выкладок:

1. Так как целевая функция линейна – она не может иметь экстремума внутри области допустимых значений.

2. Если область допустимых значений ограничена, то экстремум будет находиться в одной из вершин многогранника, ограничивающего эту область, либо оптимальных решений бесконечно много, если наклон целевой функции совпадает с наклоном какой-либо грани.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 10

Выбор оптимального плана производства текстильной продукции

Для наглядности рассмотрим геометрическое решение этой задачи и используем численные значения и размерности исходных данных, перечисленные ранее для этой задачи:

$$A_1 = 10; A_2 = 100; b_1 = 1; b_2 = 3; c_1 = 5; c_2 = 6; Z_1 = 80; Z_2 = 150; p_1 = 60; p_2 = 800; s_1 = 1,6; s_2 = 6.$$

Математическая модель задачи для этих данных будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} 0,1 x_1 + 0,05 x_2 &\leq 80; \quad 0,3 x_1 + 0,06 x_2 \leq 150; \quad x_1 \geq 60; \quad x_2 \geq 800; \\ S &= 0,16x_1 + 0,06x_2. \end{aligned} \quad (29)$$

Для геометрической интерпретации задачи необходимо в координатных осях x_1 и x_2 построить прямые, соответствующие граничным значениям неравенств, т. е. $x_1 = 60$; $x_2 = 800$; $x_2 = 1600 - 2 x_1$; $x_2 = 2500 - 5 x_1$.

Это позволит наглядно представить область допустимых значений для переменных. Только в этой области выполняются все ограничения задачи. Описанное геометрическое представление показано на *рис. 7*.

Областью допустимых значений является четырехугольник $ABCD$. Кроме этого на графике построены линии уровня целевой функции для значений $S = 60$ и 150 . Сравнивая тенденцию изменения положения линии уровня при изменении значения S , приходим к выводу, что оптимальному решению отвечает точка C с координатами $x_1 = 300$, $x_2 = 1000$, значение целевой функции в этой точке равно (29): $S = 108$.

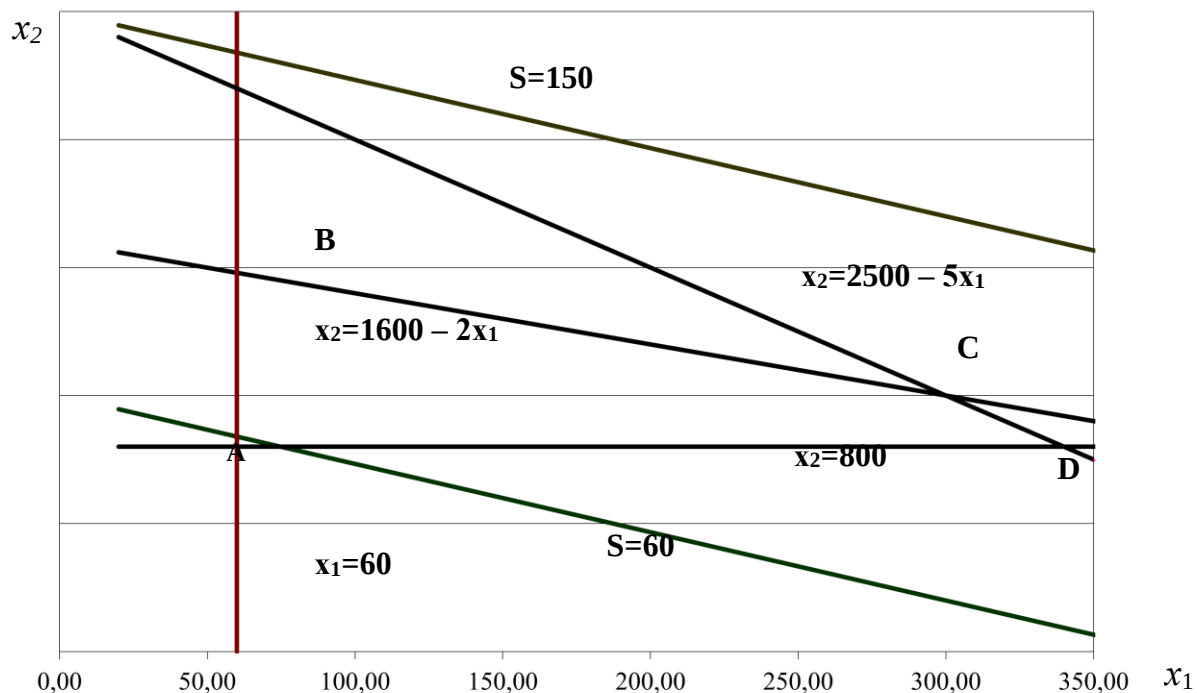


Рис. 7. Геометрическая интерпретация задачи о выборе оптимального плана производства нетканых материалов разных артикулов

10. ДИССОЦИАТИВНО-ШАГОВЫЙ МЕТОД ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Нередко при получении модели технологического процесса на основе проведения эксперимента с факторным планированием используют кодированные управляемые переменные на трех уровнях $(-1, 0, +1)$, а целевая функция представляет собой полином второго порядка. Рассматриваемый здесь метод поиска экстремума для подобных функций изложен в работе [1]. Он позволяет эффективно находить положение оптимума, когда экстремум целевой функции расположен за границами диапазона изменения управляемых переменных.

$$F(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) = b_0 + \sum_{j=1}^n b_j x_j + \sum_{j=1}^n b_{jj} x_j^2 + \sum_{j \neq i} b_{ji} x_j x_i. \quad (30)$$

Диапазон изменения управляемых переменных: $-1 \leq x_j \leq 1$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 11

Применение диссоциативно-шагового метода для поиска оптимального решения

Изложим предлагаемый метод кратко в виде алгоритма поиска:

1. Многомерную полиномиальную целевую функцию 2-го порядка преобразуют в систему квазиодномерных параболических моделей:

$$\begin{aligned}
W_1 &= b_1 x_1 + b_{11} x_1^2 + \sum b_{1i} x_1 x_i ; \\
W_j &= b_j x_j + b_{jj} x_j^2 + \sum b_{ji} x_j x_i ; \\
W_n &= b_n x_n + b_{nn} x_n^2 + \sum b_{ni} x_n x_i .
\end{aligned} \tag{31}$$

2. Из системы (31) квазиодномерных моделей выбирают любую, для которой выполняются условия

$$b_{jj} \geq 0, \quad |b_j| \geq |b_{ji}| . \tag{32}$$

При этих условиях наибольшее значение функции приходится на границы диапазона, т. е., например, x_1 может принимать значения $+1$ или -1 . Знак b_1 определяет знак граничного значения x_1 , т. е. $b_1 < 0$ соответствует $x_{1\max} = -1$, а $b_1 > 0$ соответствует $x_{1\max} = 1$.

3. Подставляют найденное значение $x_{1\max}$ (-1 или 1) в остальные модели системы (31) и после приведения подобных членов получают модели без переменной x_1 .

4. Вновь повторяют операции п. 2 и 3 пока из системы (31) не будут исключены все модели, удовлетворяющие условиям (32), и определены значения переменных $x_{1\max}, \dots, x_{k\max}$.

Если в системе (31) отсутствуют модели, удовлетворяющие условиям (32), то сразу переходят к п. 5.

5. Из оставшихся $n - k$ моделей отбирают те, которые удовлетворяют условиям

$$b_{jj} < 0, \quad |b_j| + \sum |b_{ji}| > 2 |b_{jj}|, \quad |b_j| - \sum |b_{ji}| > 2 |b_{jj}|. \tag{33}$$

Для таких моделей экстремум целевой функции находится за границами области допустимых значений $-1 \leq x_j \leq 1$, т. е. наибольшее значение функции соответствует граничному значению $x_j = -1$ при $b_j < 0$ и $x_j = +1$ при $b_j > 0$. Подставляют выбранное значение в остальные модели системы (31) и после приведения подобных членов квазиодномерные модели с меньшим количеством переменных. Далее повторяют операцию 5, пока из системы не будут исключены модели, соответствующие неравенствам (33). Если в системе отсутствуют подобные модели, то переходят к п. 6.

6. Из оставшихся моделей отбирают те, которые отвечают условиям

$$|b_{jj}| > 0, \quad |b_j| < \sum |b_{ji}| \quad b_j \neq 0 . \tag{34}$$

При этих условиях максимальное значение целевой функции может быть в одной из двух граничных точек диапазона изменения переменной $x_j = \pm 1$. Дальнейший поиск ведут отдельно для каждого значения, используя операции п. 2–6, в зависимости от выполнения условий (32)–(34). Оба значения переменных последовательно подставляют в исходную целевую функцию и сравнивают полученные значения. В качестве оптимальной выбирают ту комбинацию переменных, которой отвечает наибольшее значение.

Если в системе (31) отсутствуют модели, соответствующие условиям (34), переходят к п. 7.

7. Из оставшихся моделей системы отбирают те, которые удовлетворяют условиям

$$b_{jj} < 0, |b_j| + \sum |b_{ji}| < 2 |b_{jj}|. \quad (35)$$

При выполнении этих условий для любого $b_j \neq 0$ модели имеют максимум внутри области изменения управляемой переменной $-1 \leq x_j \leq 1$, вычисляемый по формуле

$$x_{jm} = -\frac{b_j + \sum b_{ji}x_i}{2b_{jj}}. \quad (36)$$

Она получена из необходимого условия экстремума, которое для функции (30) выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial W_j(x_1 \dots x_n)}{\partial x_j} = b_j + \sum b_{ji}x_i + 2b_{jj}x_j = 0.$$

Полученное значение переменной (36) подставляют в оставшиеся модели и тем самым исключают еще одну переменную. Эту операцию повторяют для тех из оставшихся моделей, которые удовлетворяют условиям (35). Если их нет, то переходят к п. 8.

8. Для оставшихся моделей системы (3) проверяют последние возможные варианты условий:

$$b_{jj} < 0, |b_j| + \sum |b_{ji}| > 2 |b_{jj}|, |b_j| - \sum |b_{ji}| < 2 |b_{jj}|. \quad (37)$$

В этом случае максимум располагается на одной из границ интервала $x_j = \pm 1$. Проверяют оба варианта и выбирают тот, для которого значение функции наибольшее.

Для поиска минимума целевой функции достаточно изменить ее знак на противоположный (изменяют знаки у каждого слагаемого) и искать максимум по описанному выше алгоритму.

Пример

Для иллюстрации метода воспользуемся задачей, приведенной в учебнике [1].

На ткацком станке АТМ-175, вырабатывающем махровую ткань с использованием лавсано-вискозной уточной пряжи, необходимо определить заправочное натяжение (x_1), заступ нитей грунтовой основы (x_2) и плотность ткани по утку (число нитей на 10 см) (x_3), при которых обеспечивается максимально возможная толщина ткани.

Пример. В результате проведения эксперимента получено регрессионное уравнение

$$F(x_1, x_2, x_3) = 15,39 + 0,687 x_1 + 0,193 x_2 + 0,736 x_3 - 0,145 x_1 x_2 +$$

+ 0,385 $x_1 x_3$ - - 0,08 $x_2 x_3$ + 0,438 x_1^2 + 0,423 x_2^2 + 0,313 x_3^2 ,
 где $F(x_1, x_2, x_3)$ – толщина петельной махровой ткани.

Для решения задачи оптимизации составим систему квазиодномерных моделей (уравнений):

$$\begin{aligned} W_1 &= 0,687x_1 - 0,145x_1x_2 + 0,385x_1x_3 + 0,438x_1^2 ; \\ W_2 &= 0,193x_2 - 0,145x_1x_2 - 0,08x_2x_3 + 0,423x_2^2 ; \\ W_3 &= 0,736x_3 - 0,08x_2x_3 + 0,385x_1x_3 + 0,313x_3^2 . \end{aligned} \quad (38)$$

Модель W_1 удовлетворяет условиям (32): $b_{11} = 0,438 > 0$, $b_1 = 0,687 > 0$, $|b_1| = 0,687 > \Sigma|b_{1j}| = 0,145 + 0,385 = 0,530$. Следовательно, данная модель имеет максимум в точке $x_1 = 1$.

После подстановки этого значения в модель W_2 получим

$$W_2 = 0,048x_2 - 0,08x_2x_3 + 0,423x_2^2 . \quad (39)$$

Эта модель удовлетворяет условиям (34): $b_{22} = 0,423 > 0$, $b_2 = 0,048 > 0$, $|b_2| = 0,048 < \Sigma|b_{2j}| = 0,08$. Наибольшее значение для нее возможно при двух граничных значениях $x_2 = \pm 1$.

Подставляя в модель W_3 значения $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$, получим

$$W_3 = 1,041x_3 + 0,313x_3^2 .$$

Эта модель удовлетворяет условиям (32): $b_{33} = 0,313 > 0$, $b_3 = 1,041 > 0$, $|b_3| = 1,041 > \Sigma|b_{3j}| = 0$. Значит, максимум расположен в точке $x_3 = 1$.

Подставляя в модель W_3 значения $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$, получим

$$W_3 = 1,201x_3 + 0,313x_3^2 .$$

Данная модель также удовлетворяет условиям (32): $b_{33} = 0,313 > 0$, $b_3 = 1,201 > 0$, $|b_3| = 1,201 > \Sigma|b_{3j}| = 0$ и максимум расположен также в точке $x_3 = 1$.

Таким образом, мы получили два варианта решения:

1. $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$;
2. $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Подставив обе комбинации переменных в исходную модель, вычислим соответствующие значения функции: $F(1,1,1) = 18,34$; $F(1, -1,1) = 18,404$.

Последний вариант принимаем за оптимальный.

11. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ. СПОСОБЫ ВЫБОРА КОМПЛЕКСНЫХ КРИТЕРИЕВ ОПТИМИЗАЦИИ

На этапе построения математической модели оптимизации технологического процесса обычно обнаруживается, что технолог не может выделить один показатель, характеризующий эффективность процесса, а называет не-

сколько таких показателей, экстремальные значения которых отвечают его представлениям об эффективном процессе.

Большинство реальных оптимизационных задач являются многокритериальными. Действительно, практически любой технологический процесс или агрегат оценивается рядом показателей эффективности. Значения части из них желательно иметь возможно большими, а другие – возможно меньшими. Например, разрыхлительно-очистительный агрегат должен иметь высокую производительность и обеспечивать возможно большую степень очистки волокнистой массы, наименьшую степень повреждаемости волокон, наименьший выход прядомого волокна в отходы, высокую степень разрыхления клочков волокон, минимальное потребление электроэнергии. Агрегат должен занимать минимальную площадь, обладать максимальной надежностью и минимальной стоимостью.

Эта концепция компромиссного решения, интуитивно реализуемая проектировщиками, используется и при формальных методах решения многокритериальных задач. Поскольку понятие компромиссного решения однозначно не определяется, то и решений получается множество, причем каждое из решений обладает определенными достоинствами. Однако окончательный выбор единственного варианта для практической реализации на формальном уровне неосуществим.

Концепция компромиссного решения используется при формальных способах решения многокритериальных задач. Вариантов таких решений может быть много, поскольку компромиссы могут быть различными. При этом каждое из решений может обладать своими достоинствами, а окончательный выбор единственного варианта на формальном уровне невозможен. Следовательно, формулируя многокритериальную задачу, необходимо отдавать себе отчет, что она в принципе не имеет однозначного решения и результатом является некоторый компромиссный вариант, обычно достаточно хороший по главным показателям эффективности и приемлемый по другим критериям. При этом всегда может быть предложен вариант, лучший, чем выбранный по некоторым критериям, но уступающий ему по другим показателям.

Построение комплексного критерия предполагает объединение в одном показателе эффективности всех важных частных показателей и тем самым преобразует многокритериальную оптимизационную задачу в однокритериальную. Простейшим способом такого объединения может быть использование весовых коэффициентов для каждого из показателей:

$$F(X) = \sum_{j=1}^k c_j F_j(X), \quad (40)$$

где c_j – весовые коэффициенты; $F_j(X)$ – частные показатели эффективности.

Если известны граничные значения всех частных показателей эффективности, то соотношение (40) удобнее записать в следующем виде:

$$\varphi_j(X) = \frac{F_j(X) - F_{j\min}}{F_{j\max} - F_{j\min}}. \quad (41)$$

В этом случае относительные частные показатели изменяются в известном диапазоне от 0 до 1.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 12

Решение задачи оптимизации на основе выбора комплексного критерия оптимизации и сравнение с решением задачи по частным критериям

Пример. В качестве примера воспользуемся простой регрессионной моделью получения комбинированной хлориновой пряжи линейной плотностью 25 текс с использованием капроновой нити 3,3 текс на пневмомеханическом прядильно-крутильном стенде.

В качестве управляемых переменных выступают: заправочный коэффициент крутки (x_1), частота вращения камеры (x_2), масса груза, регулирующего натяжение вводимой нити (x_3). Факторы в уравнениях регрессии кодированы, т. е. безразмерны и варьируются в диапазоне от -1 до +1. Модель процесса описывает квадратичную неровноту пряжи, определенную на приборе «Устер» в % (F_1) и разрывную нагрузку пряжи в сН (F_2):

$$\begin{aligned} F_1 &= 15,531 + 0,833x_2 + 1,094x_3 + 1,103x_1x_2 - 1,123x_1x_3 + 1,809x_3^2; \\ F_2 &= 295,79 - 4,4x_1 + 11,08x_2 + 3,534x_3 - 14,49x_1x_2 - 9,33x_1x_3 - 9,31x_3^2. \end{aligned}$$

Первый показатель изменяется в пределах от 13,59 до 19,83. Второй – в диапазоне от 252,45 до 330,22.

Комплексный критерий оптимизации мы выбираем на основе соотношения (41) с равными показателями весомости (0,5). Выглядеть он будет следующим образом:

$$F_k = -0,5 \frac{F_1 - F_{1\min}}{F_{1\max} - F_{1\min}} + 0,5 \frac{F_2 - F_{2\min}}{F_{2\max} - F_{2\min}} = -\frac{F_1 - 13,59}{6,23} + \frac{F_2 - 252,45}{77,76}. \quad (42)$$

В табл. 4 можно посмотреть, к чему приводят различные варианты выбора критерия оптимизации.

**Т а б л и ц а 4. Расчет оптимальных условий для частных (F_1 и F_2)
и комплексного критерия оптимизации (F_k)**

Абсолютный min для критерия F_1	x_1	x_2	x_3	$F_1, \%$	
	1	-1	0,0080	13,59	min F_1
Абсолютный max для критерия F_1	x_1	x_2	x_3	$F_1, \%$	
	-1	-1	1	19,83	max F_1
Абсолютный min для критерия F_2	x_1	x_2	x_3	$F_2, \text{сН}$	
	-1	-1	-1	252,45	min F_2
Абсолютный max для критерия F_2	x_1	x_2	x_3	$F_2, \text{сН}$	
	-1	1	0,691	330,20	max F_2
Абсолютный max для комплексного критерия F_k	x_1	x_2	x_3	$F_1, \%$	$F_2, \text{сН}$
	-1	1	-0,232	14,84	322,27

Как мы видим из проведенных расчетов, оценка оптимальных условий на основе принятого комплексного критерия (42) позволила получить очень хороший компромиссный вариант: частный критерий F_2 близок к максимальному значению, а частный критерий F_1 близок к минимальному значению.

Если бы мы выбрали условия для абсолютного минимума F_1 , то значение F_2 было бы равно 294,7 сН, что существенно меньше компромиссного значения. Если выбрать условия для абсолютного максимума F_2 , то величина F_1 будет равна 17,66 % – это значительно больше компромиссного значения.

Таким образом, найденный компромиссный вариант представляется действительно оптимальным по двум частным критериям.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Иванов, О. М. Методы оптимизации технологических процессов текстильной промышленности: учебное пособие / О. М. Иванов, Б. С. Михайлов. – Санкт-Петербург: СПГУТД, 2011. – 150 с.
2. Андросова, Г. М. Моделирование и оптимизация процессов / Г. М. Андросова, Е. В. Косова. – Омск: Омский государственный технический университет, 2017.
3. Примаченко, Б. М. Моделирование технологических процессов и материалов (Детерминированные модели): учебное пособие / Б. М. Примаченко. – Санкт-Петербург: СПГУТД, 2012.
4. Григорьева, Е. Г. Оптимизация технологических процессов: методические указания / сост. Е. Г. Григорьева. – Санкт-Петербург: СПбГУПТД, 2016. – 42 с.
5. Иванов, О. М. Оптимизация технологических процессов. Курсовая работа: методические указания / сост. О. М. Иванов. – Санкт-Петербург: СПбГУПТД, 2019. – 27 с.
6. Суздалов, Е. Г. Моделирование и методы оптимизации: методические указания / сост.: Е. Г. Суздалов, Т. А. Кравец. – Санкт-Петербург: СПбГУПТД, 2018. – 46 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
Содержание дисциплины. Наименование тем и их содержание	3
Правила выполнения практических работ.....	5
1. Основные понятия задач оптимизации.....	5
2. Аналитические методы оптимизации функции одной переменной.....	8
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1	
Решение задачи оптимизации аналитическим методом.....	8
3. Численные методы поиска экстремумов функции одной переменной. Метод равномерного поиска. Метод сканирования. Метод поразрядного приближения.....	9
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 2	
Поиск оптимального решения методом поразрядного приближения.....	10
4. Метод дихотомии для поиска экстремума функции одной переменной. Алгоритм его реализации. Применение метода дихотомии для построения программы расчета.....	11
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 3	
Применение метода дихотомии для решения задачи оптимизации с использованием предложенной модели.....	12
5. Поиск корней уравнения при решении задач оптимизации. Численные методы поиска корней уравнения.....	12
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 4	
Применение метода деления отрезка пополам для поиска корней уравнения при решении задачи оптимизации.....	15
6. Аналитические методы безусловной оптимизации функции нескольких переменных. Безусловная оптимизация квадратичных многомерных целевых функций.....	16
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 5	
Поиск оптимального решения для функции 3-х переменных аналитическим методом.....	18
7. Поиск экстремумов для квадратичных регрессионных моделей нескольких переменных. Матрица Гессе. Использование критерия Сильвестра для поиска экстремумов.....	18
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 6	
Решение задачи оптимизации с использованием критерия Сильвестра.....	20
8. Методы линейного программирования при решении многомерных задач оптимизации.....	20
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 7	
Решение задачи оптимизации о долевом составе смеси методом линейного программирования.....	21
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 8	
Выбор оптимального плана производства текстильных материалов.....	24
9. Геометрический метод решения задач линейного программирования.....	26
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 9	
Решение задачи оптимизации состава смеси геометрическим методом.....	27
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 10	
Выбор оптимального плана производства текстильной продукции.....	30
10. Диссоциативно-шаговый метод поиска оптимального решения.....	31
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 11	
Применение диссоциативно-шагового метода для поиска оптимального решения.....	31
11. Многокритериальные задачи оптимизации. Способы выбора комплексных критериев оптимизации.....	34
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 12	
Решение задачи оптимизации на основе выбора комплексного критерия оптимизации и сравнение с решением задачи по частным критериям.....	36
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	38

Учебное издание

**Иванов Олег Михайлович
Цыбизова Надежда Сергеевна**

ВВЕДЕНИЕ В ОПТИМИЗАЦИЮ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Практикум

Издательский редактор Н. А. Ерина

Учебное электронное издание сетевого распространения

Системные требования:
электронное устройство с программным обеспечением
для воспроизведения файлов формата PDF

Режим доступа: http://publish.sutd.ru/tp_get_file.php?id=202253, по паролю.
– Загл. с экрана.

Дата подписания к использованию 12.03.2022 г. Рег. № 53/22.

ФГБОУВО «СПбГУПТД»
Юридический и почтовый адрес:
191186, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 18.
<http://sutd.ru/>